Starter SVT

COURS DE MATHÉMATIQUES

Nicolas JACON

Université de Franche Comté

Table des matières

1 Fonctions numériques et limites de suites **3**
1.1 Fonctions numériques et suites 3
1.2 Limite de fonctions 4
1.3 Convergence de suites 6
1.4 Suites définies par une relation de récurrence 8
1.5 Limites de fonctions numériques 10

2 Primitives et intégrales **15**
2.1 Intégrales au sens de Riemann 15
2.2 Intégrales et primitives 20

3 Exemples d'équations différentielles **24**
3.1 Equations différentielles du premier ordre à variables séparables 24
3.2 Exemples d'équations homogènes 26
3.3 Equations différentielles du premier ordre linéaire 28

Chapitre 1

Fonctions numériques et limites de suites

1.1 Fonctions numériques et suites

De façon abstraite, *une application* d'un ensemble E (appelé ensemble de départ) vers un ensemble F (appelé ensemble d'arrivée) associe à tout élément de E, un élément de F. Par exemple, si on associe à chaque étudiant son numéro d'étudiant, on obtient une application de l'ensemble des étudiants vers l'ensemble des nombres entiers.

Définition 1.1.1 *Une fonction numérique* est une application dont les ensembles de départ et d'arrivée sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

En pratique, on prendra comme ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ lui-même et dans tous les exemples que l'on va considérer, l'ensemble de départ sera une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$. On note D_f et on appelle *ensemble (ou domaine) de définition* cet ensemble de départ : c'est l'ensemble de tous les x qui ont une image par f.

$$f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Exemple 1.1.2 Voici quelques exemples de fonctions numériques avec leurs domaines de définition.

- La fonction f telle que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ a pour domaine de définition $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
- La fonction f telle que $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ a pour domaine de définition $D_f = \mathbb{R}$.
- La fonction f telle que $f(x) = \ln(1+x)$ a pour domaine de définition $D_f =]-1, +\infty[$.

Définition 1.1.3 Une suite numérique est une application

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & u(n) = u_n \end{array}$$

En pratique, au lieu de parler de “la suite u”, on parle de “la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$”. En fait certaines suites, ne sont définies naturellement qu’à partir d’un rang $n_0 \in \mathbb{N}$, on écrit alors $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Exemple 1.1.4 Voici des exemples de suites numériques
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$,
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \ln(n)$,
- la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie pour tout $n \geq 2$ par $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$,

1.2 Limite de fonctions

Nous introduisons les deux notations suivantes : $\forall$ veut dire “quelque soit” ou “pour tout” ; $\exists$ veut dire “il existe”. Ceci nous sera utile afin d’énoncer des définitions et propositions de manières concise.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique.

- On dit que f tend vers $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si

  $$\forall \epsilon > 0,\ \exists x_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } x \geq x_\epsilon \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$$

  En français. Ceci pourrait se traduire par
  “Aussi petit que soit $\epsilon > 0$, il existe un x à partir duquel toutes les valeurs de f se trouvent situés dans l’intervalle $]l - \epsilon, l + \epsilon[$”
- On dit que f tend vers $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers $-\infty$ si et seulement si

  $$\forall \epsilon > 0,\ \exists x_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } x \leq -x_\epsilon \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$$

Exemple 1.2.1 On a :

$$\lim_{x\rightarrow+\infty} \frac{x}{1+x} = 1$$

La limite d’un quotient de fonctions polynômes en $+\infty$ ou $-\infty$ est la limite des termes de plus haut degré.

De même, on dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists x_A \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \geq x_A \Rightarrow f(x) > A$$

On dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists x_A \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \geq x_A \Rightarrow f(x) < A$$

On a bien sûr des définitions similaires lorsqu'on cherche à étudier les limites pour x tendant vers $-\infty$.

Exemple 1.2.2 On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^6 + x^2 + 1}{x^3 + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^6}{x^3} = +\infty$$

toujours en utilisant le fait que la limite d'un quotient de fonctions polynômes en $+\infty$ ou $-\infty$ est la limite des termes de plus haut degré.

Exemple 1.2.3 Soit $k \in \mathbb{R}^+$. On cherche

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+k)}{\ln(x)}.$$

On a

$$\ln(x+k) = \ln(x(1+\frac{k}{x})) = \ln(x) + \ln(1+\frac{k}{x})$$

On obtient donc :

$$\frac{\ln(x+k)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{k}{x})}{\ln(x)}$$

Or on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{k}{x})}{\ln(x)} = 0$$

Il suit que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+k)}{\ln(x)} = 1$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction numérique. On dit que f est *continue* en $x_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Une somme et un produit de fonctions continues en x_0 est continue en x_0. Un quotient de fonctions continues en x_0 est aussi continue si ce quotient est défini (c'est à dire si le dénominateur ne s'annule pas en ce point). De plus si g est continue en x_0 et f est continue en $g(x_0)$ alors $f \circ g$ est continue en x_0 : on dit que la composée de fonctions continues est continue.

Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$, la fonction exponentielle, les fonctions sinus et cosinus le sont également. La fonction logarithme est continue sur $]0, +\infty[$. Ainsi et par exemple, la fonction f telle que pour $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x^5 + \ln(x^2 + \sin^2(x) + 1) + e^{x^{100}+1}.$$

est continue comme somme, produit et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.2.4 On considère la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On a alors

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

Pourtant, on a $f(0) = 0$. Donc cette fonction n'est pas continue en 0.

1.3 Convergence de suites

Etant donnée une suite numérique, une question essentielle sera de déterminer si cette suite est convergente et si oui vers quelle limite. Autrement dit, on se demande si u_n "tend" vers une valeur particulière lorsque n devient de plus en plus grand.

Définition 1.3.1 On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_\epsilon \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon$$

En français, cette définition pourrait se traduire par :

"Aussi petit que l'on prenne $\epsilon > 0$, il existe un rang N_ϵ à partir duquel tous les termes de la suite se trouvent situés dans l'intervalle $[l - \epsilon, l + \epsilon]$.

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N_A \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_A \Rightarrow u_n \geq A$$

Enfin, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N_A \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_A \Rightarrow u_n \leq A$$

Définition 1.3.2 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée c'est à dire qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n < A$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée c'est à dire qu'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > B$.

Proposition 1.3.3 *Toute suite convergente est bornée.*

La réciproque est-elle vraie ? la réponse est NON en général. Par exemple, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est bornée car minorée par -1 et majorée par 1. Pourtant elle n'est pas convergente.

Par contre, une propriété plus faible est toujours vérifiée.

Définition 1.3.4 Une suite extraite (ou sous-suite) d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite du type $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite alors la fonction ϕ telle que $\phi(n) = 2n$ est strictement croissante donc la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Plus concrètement, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = 2n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ Alors la fonction ϕ tel que $\phi(n) = 4n + 1$ est strictement croissante. On a $u_{\phi(n)} = 8n + 4$. Donc la suite $(8n + 4)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de u_n.

Proposition 1.3.5 *Toute suite bornée admet une suite extraite convergente. Ainsi, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée, il existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction croissante telle que $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.*

Exemple 1.3.6

- Reprenons l'exemple ci-dessus, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit la fonction ϕ telle que $\phi(n) = 2n$. Alors $u_{\phi(n)} = (-1)^{2n} = 1$. La suite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante égale à 1, elle est donc convergente.
- On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Attention, comme l'expression à l'intérieur de la parenthèse et la puissance dépendent toutes les deux de n, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend PAS vers 1 (ni vers $+\infty$). En fait, on a

$$(1 + \frac{1}{n})^n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$$

Or, on a

$$\lim_{n\to\infty} n\ln(1 + \frac{1}{n}) = 1$$

En effet, on a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ (voir §1.5)}$$

En posant $x = \frac{1}{n}$, on obtient le résultat voulu. Il suit finalement :

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e^1$$

Ce dernier exemple est important. En pratique, il est vivement conseillé de mettre tout écriture du type $a^{f(x)}$ sous forme exponentielle avant de commencer des calculs. Ainsi, on aura $a^{f(x)} = e^{f(x)\ln(a)}$

Comment voir facilement si une suite est convergente ? Un critère commode est le suivant.

Définition 1.3.7 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite monotone si elle est croissante ou décroissante.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \geq u_n$. Elle est strictement croissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} > u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \leq u_n$. Elle est strictement décroissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} < u_n$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n \geq u_{n-1} \geq u_{n-2} \geq .... \geq u_0$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par u_0. De même, toute suite décroissante est majorée par u_0. Que se passe t-il si ces suites sont bornées

Proposition 1.3.8 *Toute suite croissante et majorée est convergente. Toute suite décroissante et minorée est convergente.*

Un exemple d'utilisation de cette proposition est donné dans le paragraphe suivant.

1.4 Suites définies par une relation de récurrence

Une suite définie par une relation de récurrence est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$. Les propriétés de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ découleront des propriétés de f.

Par exemple, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et si f est une fonction continue, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge nécessairement vers un point $l \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(l) = l$. Le réel l est appelé un point fixe de f.

Exemple 1.4.1 Nous traitons deux exemples de suite définies par une relation de récurrence.

– On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ fixé et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
  Remarquons tout d'abord que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour montrer ceci, on raisonne par récurrence :
  1. on a $u_0 > 0$
  2. Supposons $u_n > 0$, on obtient alors
  $$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} > 0$$
  donc la récurrence est vérifiée

  On a alors
  $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+u_n} < 1$$
  Il suit que $u_{n+1} < u_n$ et donc cette suite est décroissante. Elle est minorée par 0 donc elle est convergente.
  Sa limite est un point fixe de la fonction f tel que $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ qui est continue sur $]-1, +\infty[$. Soit l un tel point fixe. On a alors $l = \dfrac{l}{1+l}$ ce qui donne $l = 0$.

– Soit $\alpha > 0$ et soit $u_0 \geq \sqrt{\alpha}$. On pose
  $$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{\alpha}{u_n})$$
  On pose $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{\alpha}{x})$ qu'on étudie sur $]\sqrt{\alpha}, +\infty[$ où cette fonction est bien définie.
  On a $f'(x) = \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{\alpha}{x^2})$. Alors f' est positive sur $[\sqrt{\alpha}, +\infty[$. Ceci implique donc que f est croissante sur ce même intervalle. Montrons alors par récurrence que $u_n \geq \sqrt{\alpha}$.
  1. Si $n = 0$, on a $u_0 \geq \sqrt{\alpha}$,
  2. Supposons que $u_n \geq \sqrt{\alpha}$ et montrons que $u_{n+1} \geq \sqrt{\alpha}$. On a $u_{n+1} = f(u_n)$. Comme f est croissante sur $[\sqrt{\alpha}, +\infty[$ et comme $u_n \geq \sqrt{\alpha}$, on a $f(u_n) \geq f(\sqrt{\alpha}) = \sqrt{\alpha}$. Ainsi, on obtient $f(u_n) \geq \sqrt{\alpha}$ donc on obtient $u_{n+1} \geq \sqrt{\alpha}$.

  La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc minorée par $\sqrt{\alpha}$. De plus, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq \sqrt{\alpha}$
  $$u_{n+1} - u_n = \frac{\alpha}{2u_n} - \frac{u_n}{2} = \frac{\alpha - u_n^2}{2u_n} < 0$$

Donc cette suite est décroissante. Comme est elle aussi minorée, elle est convergente vers un point fixe de f. Ce point l vérifie

$$l = \frac{1}{2}(l + \frac{\alpha}{l})$$

c'est donc $\sqrt{\alpha}$ ou $-\sqrt{\alpha}$. Mais ce ne peut-être $-\sqrt{\alpha}$ car

$$-\sqrt{\alpha} < 0 < u_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle converge donc nécessairement vers $\sqrt{\alpha}$.

De l'exercice ci-dessus, on remarquera bien que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour f continue, f peut être croissante sans que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne le soit. Par contre, il est parfois possible (comme dans cet exercice) de prouver la croissance ou la décroissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en étudiant les variations de f.

1.5 Limites de fonctions numériques

Dans cette partie, nous allons étudier certaines limites de fonctions numériques. On commence par les limites fondamentales suivantes :

– Croissance comparée entre exponentielle et puissance : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{e^x} = 0.$$

Exemple 1.5.1 Par exemple, on a

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3^x} = 0.$$

car $3^x = e^{x\ln(3)}$.

– Croissance comparée entre puissance et logarithme, pour tout $\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$$

Rappelons que si $a > 1$, on a

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

On obtient ainsi :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_a(x)}{x^\alpha}=0$$
$$\lim_{x\to0^+}x^\alpha\log_a(x)=0$$

Exemple 1.5.2 On a

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{\ln(x)}=0$$

Nous allons effectuer quelques rappels sur la notion de dérivation. Ceux-ci nous permettront plus loin de déduire des limites remarquables. On dit que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est *dérivable* en $x_0\in\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existe et est finie. On note alors $f'(x_0)$ cette limite.

Si f est dérivable en x_0 alors la courbe de f admet *une tangente* au point $(x_0,f(x_0))$. Son équation est :

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

Exemple 1.5.3 Soit $f(x)=x^3+1$. f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable en $x_0=1$, on a $f'(x)=3x^2$ donc $f'(x_0)=3$. La tangente à la courbe de f au point $(1,f(1))$ a donc pour équation

$$y=2+3(x-1)=3x-1$$

Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions numériques dérivables en un point $x_0\in\mathbb{R}$.

– $f+g$ est une fonction dérivable en x_0 et on a :

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

– fg est une fonction dérivable en x_0 et on a :

$$(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+g'(x_0)f(x_0)$$

– Si $n\in\mathbb{N}$, alors f^n est une fonction dérivable en x_0 et on a :

$$(f^n)'(x_0)=nf'(x_0)f(x_0)^{n-1}$$

En particulier, si $f(x)=x^n$ pour $x\in\mathbb{R}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x\in\mathbb{R}$, on a $f'(x)=nx^{n-1}$.
Attention cependant, la fonction f telle que $f(x)=2^x=e^{x\ln(2)}$ pour $x\in\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x\in\mathbb{R}$, on a $f'(x)=2^x\ln(2)$ (l'élément en puissance est ici une variable x, pas un élément de $\mathbb{N}$ fixé !)

– Si $g(x_0) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est une fonction dérivable en x_0 et on a :

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Exemple 1.5.4 Soit $f(x) = \dfrac{5x + x\ln(x)}{e^x + 1}$. Cette fonction est définie pour $x > 0$ et dérivable sur ce domaine. Alors :

$$f'(x) = \frac{(5 + \ln(x) + x\frac{1}{x})(e^x + 1) - (5x + x\ln(x))e^x)}{(e^x + 1)^2}$$

On obtient :

$$f'(x) = \frac{5e^x - 5xe^x + e^x\ln(x) + \ln(x) - xe^x\ln(x) + 6}{(e^x + 1)^2}$$

Soient I, J et K trois intervalles de $\mathbb{R}$ et soient $g : I \to J$ et $f : J \to K$ deux fonctions numériques. On considère la fonction dite composée

$$\begin{array}{rccl} f \circ g : & I & \to & K \\ & x & \mapsto & f(g(x)) \end{array}$$

Alors si g est dérivable en x_0 et f en $g(x_0)$ alors $f \circ g$ est dérivable en x_0 et on a

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

Exemple 1.5.5 On peut retrouver la formule de dérivation de $\ln(u)$ lorsque $u : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est une fonction dérivable. Si $x_0 \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$(\ln(u))'(x_0) = \frac{1}{u(x_0)}u'(x_0)$$

On pourra de même retrouver toutes les formules classiques de dérivation de e^u, u^n, etc ...grâce à cette formule.

Intéressons nous maintenant aux fonctions réciproques. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soit $g : I \to J$ et $f : J \to I$ deux fonctions numériques vérifiant pour tout $x \in I$, $f(g(x)) = x$. On dit alors que f et g sont réciproques l'une de l'autre et on note $f = g^{-1}$ ou bien $g = f^{-1}$. Attention ! il ne faut pas confondre f^{-1} et $\dfrac{1}{f}$.

Si f est dérivable en $x_0 \in J$ et si $f'(x_0) \neq 0$ alors g est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$et on a

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

c'est à dire :

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Exemple 1.5.6 – Considérons la fonction logarithme $f(x) = \ln(x)$. Elle est définie de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$. La fonction exponentielle $g(x) = e^x$ va de $\mathbb{R}$ vers $]0, +\infty[$ et les fonctions exponentielles et logarithmes sont réciproques l'une de l'autre. On peut alors retrouver la dérivée du logarithme grâce à la formule ci-dessus et la dérivée de l'exponentielle. Soit $x_0 \in]0, +\infty[$ alors

$$f'(x_0) = \frac{1}{g'(f(x_0))} = \frac{1}{e^{\ln(x_0)}} = \frac{1}{x_0}$$

– Considérons la fonction tangente $f(x) = \mathrm{tg}(x)$. Elle va de $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. Elle est strictement croissante sur son domaine de définition et admet donc une fonction réciproque appelée Arctg définie de $\mathbb{R}$ vers $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[,\ y = \mathrm{Arctg}(x) \iff x = \mathrm{tg}(y)$$

Les fonctions Arctg et tg sont réciproques l'une de l'autre et on a :

$$\mathrm{lim}_{x\to+\infty}\mathrm{Arctg}(x) = \frac{\pi}{2},\ \mathrm{lim}_{x\to-\infty}\mathrm{Arctg}(x) = -\frac{\pi}{2}$$

C'est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et en utilisant la règle de dérivation d'une fonction réciproque, comme on a $\mathrm{tg}'(x) = 1 + \mathrm{tg}^2(x)$, on obtient pour $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{Arctg}'(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2(\mathrm{Arctg}(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

La notion de dérivée permet de déduire des limites fondamentales en interprétant celles-ci comme des dérivées.

– $\mathrm{lim}_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$. En effet, en posant $f(x) = e^x$ et $x_0 = 0$, on obtient :

$$\mathrm{lim}_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \mathrm{lim}_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x}$$

Donc cette limite n'est autre que $f'(x_0) = e^0 = 1$.

- $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$. En effet, en posant $f(x) = \ln(1+x)$ et $x_0 = 0$, on obtient :
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$
Donc cette limite n'est autre que $f'(x_0) = \dfrac{1}{1+x_0} = 1$.
- $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{x} = n$. En effet, en posant $f(x) = (1+x)^n$ et $x_0 = 0$, on obtient :
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}$$
Donc cette limite n'est autre que $f'(x_0) = n$.
- $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. En effet, en posant $f(x) = \sin(x)$ et $x_0 = 0$, on obtient :
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$$
Donc cette limite n'est autre que $f'(x_0) = \sin(0) = 0$.
- $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)-1}{x} = 0$. En effet, en posant $f(x) = \cos(x)$ et $x_0 = 0$, on obtient :
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}$$
Donc cette limite n'est autre que $f'(x_0) = \cos(0) = 1$.

Chapitre 2

Primitives et intégrales

2.1 Intégrales au sens de Riemann

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $a<b$.

Définition 2.1.1 Soient a_0, a_1,...,a_m, $m+1$ points de l'intervalle $[a,b]$ tels que

$$a_0 = a < a_1 < a_2 < ... < a_m = b$$

On dit que $(a_0, ..., a_m)$ est une subdivision de $[a,b]$. Le pas de cette subdivision est la longueur $a_{j+1} - a_j$ du plus grand des m intervalles $[a_j, a_{j+1}]$. On dit que la subdivision est régulière si tous les intervalles ont même longueur, c'est à dire si pour tout $j = 0, ..., m-1$, on a $a_{j+1} - a_j = \dfrac{(b-a)}{m}$.

Exemple 2.1.2 Soit $[1,3]$ intervalle de $\mathbb{R}$ alors $(1, 1.5, 2, 2.5, 3)$ est une subdivision régulière de cet intervalle de pas 0.5. La subdivision $(1, 1.5, 2, 2.1, 2.2, 3)$ est une autre subdivision non régulière et elle est de pas 0.1.

Nous définissons maintenant un certain type de fonctions numériques. Celles-ci vont nous permettre d'introduire la notion d'intégrale de Riemann.

Définition 2.1.3 Une fonction en escalier associée à la subdivision $(a_0, ..., a_m)$ de $[a,b]$ est une fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ constante sur chacun des intervalles $]a_j, a_{j+1}[$. Autrement dit, pour tout $j = 0, ..., m-1$, il existe $c_j \in \mathbb{R}$ tel que $g(t) = c_j$ si $t \in]a_j, a_{j+1}[$.[1]

[1] Peu importe la valeur de g aux extrémités, ceci n'intervient pas dans la suite

Exemple 2.1.4 Soit $[1,3]$ intervalle de $\mathbb{R}$ alors $(1, 1.5, 2, 2.5, 3)$ est une subdivision régulière de cet intervalle. Alors la fonction g tel que pour $x \in [1,3]$,

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [1, 1.5[\\ 2 & \text{si } x \in [1.5, 2[\\ 5 & \text{si } x \in [2, 2.5[\\ -1 & \text{si } x \in [2.5, 3[\end{cases}$$

est une fonction en escalier.

Nous pouvons maintenant définir l'intégrale d'une fonction en escalier, avec les notations de la définition 2.1.3, on a :

$$\int_a^b g(t)dt = \sum_{j=0}^{m-1} (a_{j+1} - a_j)c_j$$

Le but est maintenant d'introduire l'intégrale d'une fonction plus générale à partir de cette définition. Tout d'abord, nous allons définir les fonctions qui pourront être intégrés.

Définition 2.1.5 Une somme de Riemann associée à la fonction f et à la subdivision $(a_0, ..., a_m)$ de $[a,b]$ est une somme

$$S(f) = \sum_{j=0}^{m-1} f(\alpha_j)(a_{j+1} - a_j)$$

où $\alpha_j \in [a_j, a_{j+1}]$ pour $j = 0, ..., m-1$.

Ainsi, une somme de Riemann correspond à l'intégrale d'une fonction en escalier g vérifiant $g(x) = c_j = f(\alpha_j)$ si $x \in [a_j, a_{j+1}[$.

Remarquons que si la subdivision $(a_0, ..., a_m)$ est régulière alors toute somme de Riemann s'écrit

$$S(f) = \frac{b-a}{m} \sum_{j=0}^{m-1} f(\alpha_j),$$

où $\alpha_j \in [a_j, a_{j+1}]$ pour $j = 0, ..., m-1$.

Exemple 2.1.6 Soit $[1,3]$ intervalle de $\mathbb{R}$ alors $(1, 1.5, 2, 2.5, 3)$ est une subdivision régulière de cet intervalle. Considérons la fonctions f telle que $f(x) =$

$2x$ pour tout $x \in [1,3]$. On choisit ensuite $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1.5$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 2.5$. Alors

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{b-a}{m}\sum_{j=0}^{m-1} f(\alpha_j) \\ &= \frac{2}{4}(f(1)+f(1.5)+f(2)+f(2.5)) \\ &= 7 \end{aligned}$$

Ceci correspond à l'intégrale de la fonction en escalier g tel que :

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in [1, 1.5[\\ 3 & \text{si } x \in [1.5, 2[\\ 4 & \text{si } x \in [2, 2.5[\\ 5 & \text{si } x \in [2.5, 3] \end{cases}$$

Définition 2.1.7 On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ si toutes les sommes de Riemann associées à f convergent vers une limite unique I lorsque le pas de la subdivision tend vers 0. I est par définition la valeur de l'intégrale de f sur $[a,b]$, on note

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Remarquons que la désignation de la variable d'intégration (x dans la définition ci-dessus) n'a pas d'incidence sur la valeur de l'intégrale, ainsi, on a aussi

$$I = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt.$$

Peut-on maintenant donner des familles de fonctions intégrables ?

Théorème 2.1.8 *Toute fonction continue sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$. Toute fonction monotone sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$*

Attention, la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est bien monotone (et d'ailleurs continue !) sur $]0,1]$ mais elle n'est pas définie en 0. Elle n'est donc pas a priori intégrable (et en fait elle ne l'est effectivement pas !).

Si f est continue (donc intégrable), on peut définir pour chaque subdivision $(a_0, ..., a_m)$ de $[a,b]$ deux sommes particulières :

– une somme dite majorante :

$$\overline{S}(f) = \sum_{j=0}^{m-1}(a_{j+1} - a_j)\overline{c_j}$$

où

$$\overline{c_j} = \max(f(t); t \in [a_j, a_{j+1}])$$

– une somme dite minorante :

$$\underline{S}(f) = \sum_{j=0}^{m-1}(a_{j+1} - a_j)\underline{c_j}$$

où

$$\underline{c_j} = \min(f(t); t \in [a_j, a_{j+1}])$$

Ces deux sommes tendent vers $\int_a^b f(t)dt$ lorsque le pas de la subdivision tend vers 0

Proposition 2.1.9 *Si f est une fonction positive et intégrable sur $[a, b]$, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est l'aire de la partie du plan située entre les droites verticales d'abscisses $x = a$ et $x = b$, l'axe des abscisses et le graphe de f.*

Cette proposition se vérifie aisément pour le cas des fonctions en escalier ...

Exemple 2.1.10 Soit la fonction constante f égale à 2 sur l'intervalle $[0, 3]$, c'est une fonction continue et si on choisit une subdivision $(a_0, ..., a_m)$ de $[0, 3]$, on a :

$$\overline{S}(f) = \sum_{j=0}^{m-1}(a_{j+1} - a_j)\overline{c_j}$$

Comme $\overline{c_j}$ vaut nécessairement 2 pour tout j, on a :

$$\overline{S}(f) = 2\sum_{j=0}^{m-1}(a_{j+1} - a_j)$$

On obtient :

$$\overline{S}(f) = 6$$

Quand le pas de subdivision tend vers 0, $\overline{S}(f)$ tend bien sûr vers 6 donc l'intégrale $\int_0^3 f(t)dt$ vaut 6. On remarque que c'est bien l'aire décrite dans la proposition ci-dessus.

Soit f une fonction intégrable sur un intervalle $[a, b]$. Nous avons les règles de calculs suivantes :

– Pour tout $x_0 \in [a,b]$, f est encore intégrable sur les intervalles $[a,x_0]$ et $[x_0,b]$. De plus :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^b f(t)dt$$

c'est la relation de Chasles. On obtient ainsi :

$$\int_a^a f(t)dt = 0 \text{ et } \int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$$

– Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et toute fonction g intégrable sur $[a,b]$, on a :

$$\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \lambda \int_a^b g(t)dt$$

On dit que l'intégrale est linéaire.

Signalons également les inégalités suivantes :

– Si f est une fonction intégrable sur un intervalle $[a,b]$ tel que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$ alors

$$\int_a^b f(t)dt \geq 0$$

– Si f et g sont intégrables sur un intervalle $[a,b]$ et si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$ alors

$$\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$$

– Si f est une fonction intégrable sur un intervalle $[a,b]$ tel qu'il existe deux réels m et M vérifiant $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$ alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$$

Cette inégalité est appelée inégalité de la moyenne.

Citons enfin la formule de la moyenne : si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ alors il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)dt = (b-a)f(x_0).$$

2.2 Intégrales et primitives

Nous cherchons maintenant à donner des méthodes pratiques et efficaces pour déterminer la valeur d'une intégrale.

Théorème 2.2.1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in [a, b]$ alors la fonction F_{x_0} définie pour tout $x \in [a, b]$ par*

$$F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

est dérivable et vérifie pour tout $x \in [a, b]$:

$$F'_{x_0}(x) = f(x)$$

F_{x_0} est appelée la primitive de f qui s'annule en x_0. On a en effet $F_{x_0}(x_0) = 0$.

Ainsi les primitives permettent de calculer les intégrales :

Théorème 2.2.2 *Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et si F est une primitive de f sur $[a, b]$ alors*

$$\int_{a}^{b} f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$$

Voici un tableau des primitives de fonctions usuelles. On note également l'intervalle I sur lequel les fonctions peuvent être intégrées.

Fonction	**Primitive**	**Domaine**
x^α $(\alpha \in \mathbb{N})$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$I \subset \mathbb{R}$
x^α $(\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$I \subset]-\infty, 0[$ ou $I \subset]0, +\infty[$
x^α $(\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$I \subset]0, +\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x)$	$I \subset]0, +\infty[$
$e^{\lambda x}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$	$\dfrac{1}{\lambda} e^{\lambda x}$	$I \subset \mathbb{R}$
$\cos(ax)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax)$	$I \subset \mathbb{R}$
$\sin(ax)$ $(a \in \mathbb{R})$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax)$	$I \subset \mathbb{R}$

Exemple 2.2.3 Voici deux exemples de calculs d'intégrales.

– Soit la fonction f définie sur $[0, 2]$ par

$$f(x) = 7x^6 + 4x + 1$$

Alors la fonction F telle que pour $x \in [0, 2]$

$$F(x) = x^7 + 2x^2 + x$$

est une primitive de f. On a donc :

$$\int_0^2 f(x)dx = F(2) - F(0) = 2^7 + 4 + 2 = 138$$

– Soit la fonction f définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par

$$f(x) = \cos(x)$$

Alors la fonction F telle que pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$F(x) = \sin(x)$$

est une primitive de f. On a donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = F(\frac{\pi}{2}) - F(0) = \sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0) = 1$$

Il est parfois délicat de trouver une primitive à une fonction intégrable et donc de déterminer son intégrale. Deux techniques importantes vont parfois nous aider à contourner le problème.

Le changement de variable :

Théorème 2.2.4 *Soit ϕ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que la dérivée ϕ' de ϕ est continue et de signe constant sur $]a, b[$. Alors pour toute fonction f continue sur l'intervalle $\phi([a, b])$, on a*

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx$$

Remarquons que
- Si $\phi' \geq 0$ sur $]a, b[$, on a ϕ croissante et donc $\phi([a, b]) = [\phi(a), \phi(b)]$.
- Si $\phi' \leq 0$ sur $]a, b[$, on a ϕ décroissante et donc $\phi([a, b]) = [\phi(b), \phi(a)]$.

Exemple 2.2.5 Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$. On considère la fonction ϕ définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par $\phi(t) = \cos(t)$. On a $\phi'(t) = -\sin(t)$ et donc ϕ est décroissante sur $[0,\frac{\pi}{2}]$. Si $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, on a

$$f(\phi(t)) = \sqrt{1-\cos^2(t)} = |\sin(t)| = \sin(t)$$

pour $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\int_{0=\cos(\frac{\pi}{2})}^{1=\cos(0)} \sqrt{1-x^2}dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (-\sin^2(t))dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(2t))dt \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)dt \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}[\sin(2t)]_0^{\frac{\pi}{2}} dt \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

L'intégration par parties :

Théorème 2.2.6 *Soient f et g deux fonctions dérivables sur $]a,b[$ à dérivées continues sur $[a,b]$. Alors, on a :*

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

Exemple 2.2.7 Voici deux exemples d'utilisation de cette intégration par partie :

– Soit $h(x) = \ln(x)$ pour $x \in [1,3]$. On cherche l'intégrale :

$$I = \int_1^3 \ln(t)dt$$

Alors, en posant $g(x) = x$ et $f(x) = \ln(x)$, comme alors $g'(x) = 1$ et $f'(x) = \frac{1}{x}$, on obtient par intégration par partie :

$$I = [t\ln(t)]_1^3 - \int_1^3 dt$$

Alors :

$$I = 3\ln(3) - 2$$

– Soit $m \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m(t)dt$$

Supposons $m > 1$ et posons $f(t) = \sin^{m-1}(t)$ alors $f'(t) = (m-1)\sin^{m-2}(t)\cos(t)$ et $g'(t) = \sin(t)$, alors $g(t) = -\cos(t)$. On a alors :

$$\begin{aligned} I_m &= -[\cos(t)\sin^{m-1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}(t)\cos^2(t)dt \\ &= (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}(t)dt - (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m(t)dt \\ &= (m-1)I_{m-2} - (m-1)I_m \end{aligned}$$

On a alors :

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$$

Comme $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$, on vérifie (par exemple par récurrence) que

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{(2p-1)(2p-3)...3.1}{2p(2p-2)...4.2}\frac{\pi}{2} \\ I_{2p+1} &= \frac{(2p)(2p-2)...4.2}{(2p+1)(2p-1)...3.1} \end{aligned}$$

Chapitre 3

Exemples d'équations différentielles

On se pose ici la question suivante : peut-on trouver toutes les fonctions dérivables vérifiant $u'(x) = u(x)$? on sait que $u(x) = a\exp(x)$ pour $a \in \mathbb{R}$ est une solution à ce problème ? mais est ce que c'est la seule ?

Le but de ce chapitre va être d'étudier ce type d'équations appelées "équation différentielles" et leurs solutions.

3.1 Equations différentielles du premier ordre à variables séparables

Définition 3.1.1 On appelle équation différentielle du premier ordre à variables séparables toute équation pouvant se mettre sous la forme

$$(E) \quad v(y(x))y'(x) = u(x)$$

d'inconnue la fonction y et de variable x.

On écrit parfois pour simplifier

$$v(y)dy = u(x)dx$$

ce qui explique la terminologie "variables séparables". Quelle est la solution d'une telle équation ?

Soit U une primitive de u et soit V une primitive de v. Les solutions de (E) sont les fonctions $y = f(x)$ telles que $V(f(x)) = U(x) + \text{Cste}$ pour tout x. Ainsi, si V admet une fonction réciproque $W = V^{-1}$, la solution générale s'écrit :

$$y = f(x) = W(U(x) + \text{Cste})$$

Exemple 3.1.2 – On considère l'équation

$$y' = -\frac{y}{x}$$

On peut la mettre sous la forme :

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$$

si $x \neq 0$ et $y \neq 0$. On obtient alors

$$\ln|y| = -\ln|x| + C$$

où C est une constante réel. Si on pose $C = \ln|c|$ pour une constante réel c non nul, on obtient alors la solution générale :

$$y = \frac{c}{x}$$

– On considère l'équation différentielle :

$$y' = 4x^3(1+y)$$

Lorsque $y \neq -1$, on obtient :

$$\frac{y'}{1+y} = 4x^3$$

donc :

$$\ln|y+1| = x^4 + C$$

où C est une constante réel. Il suit finalement

$$|y+1| = e^{x^4+C}$$

d'où :

$$y = -1 + ke^{x^4}$$

où k est une constante réel. Si on ajoute en plus une condition initale à cette équation différentielle, par exemple $(x_0, y_0) = (1, 0)$, on obtient

$$0 = -1 + ke^{x_0^4}$$

d'où $k = e^{-1}$ et il suit :

$$y = e^{x^4-1} - 1$$

– La désintégration du radium est proportionnelle à sa masse à l'instant considéré. On veut déterminer la loi de variation de cette masse en fonction du temps sachant qu'à l'instant $t = 0$, sa masse était m_0. L'équation différentielle à résoudre est :

$$\frac{dm}{dt} = -km(t)$$

avec $k > 0$. On a :

$$\frac{m'}{m} = -k$$

On obtiendra :

$$m = Ce^{-kt}$$

où C est une constante réel. La condition initiale $m(0) = m_0$ implique $m_0 = C$. On obtient donc :

$$m = m_0 e^{-kt}$$

3.2 Exemples d'équations homogènes

On s'intéresse maintenant à un autre type d'équations du premier ordre : les équations homogènes du premier ordre.

Définition 3.2.1 On dit que la fonction de deux variables $f(x, y)$ est homogène de degré n si pour tout réel α, on a

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^n f(x, y)$$

Exemple 3.2.2 Soit $\Phi(x, y) = xy - y^2$. On a $\Phi(\alpha x, \alpha y) = \alpha^2 \Phi(x, y)$ donc Φ est homogène de degré 2. Soit maintenant $\Phi(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$. On a $\Phi(\alpha x, \alpha y) = \Phi(x, y)$ donc Φ est homogène de degré 0.

Définition 3.2.3 Une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = \phi(x, y)$ est dite homogène par rapport à x et y si la fonction $\phi(x, y)$ est homogène de degré 0.

Quelle est la méthode de résolution d'une telle équation ? pour chaque couple (x, y), on a

$$\phi(x, y) = \phi(1, \frac{y}{x})$$

car ϕ est homogène de degré 0. On effectue alors la substitution $u = \frac{y}{x}$ c'est à dire $y = xu$ de sorte que $y' = u + xu'$. L'equation devient donc :

$$xu' = \phi(1, u) - u$$

soit encore

$$\frac{u'}{\phi(1, u) - u} = \frac{1}{x}$$

si il n'y a pas de probleme de définition. On cherche alors une primitive pour déterminer u et on obtient alors y.

Exemple 3.2.4 On considère l'équation différentielle

$$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

La fonction $\Phi(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ est homogène de degré 0. On fait alors la substitution $u = \frac{y}{x}$. En écrivant :

$$y' = \frac{\frac{y}{x}}{1 - \frac{y^2}{x^2}}$$

on obtient :

$$u + xu' = \frac{u}{1 - u^2}$$

soit encore :

$$xu' = \frac{u^3}{1 - u^2}$$

d'où l'équation :

$$\frac{u'(1 - u^2)}{u^3} = \frac{1}{x}$$

ou encore

$$\frac{u'}{u^3} - \frac{u'}{u} = \frac{1}{x}$$

En passant aux primitives, il suit :

$$-\frac{1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|x| + \ln|c|$$

c'est à dire :

$$-\frac{1}{2u^2} = \ln|cxu|.$$

On obtient alors en posant $u = \dfrac{y}{x}$:

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \ln|cy|$$

Les solutions y de l'équation différentielle devront donc vérifier cette équation (non différentielle). Par contre, Il n'est pas possible d'exprimer y en fonction de x au moyen de fonctions élémentaires dans l'équation ci-dessus. On en restera donc là ...

3.3 Equations différentielles du premier ordre linéaire

Définition 3.3.1 On appelle équation différentielle du premier ordre linéaire toute équation pouvant se mettre sous la forme

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

Le terme $c(x)$ est appelé le second membre de l'équation. A toute équation de ce type correspond une équation "sans second membre" qui s'écrit :

$$a(x)y' + b(x)y = 0$$

Théorème 3.3.2 *La solution générale d'une équation différentielle linéaire s'obtient en ajoutant une solution particulière de l'équation avec second membre à la solution générale de l'équation sans second membre.*

La démonstration de ce théorème est en fait relativement simple : considérons l'équation avec second membre :

$$(E) \quad a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

et celle sans second membre :

$$(E_0) \quad a(x)y' + b(x)y = 0$$

Soit $y = g(x)$ une solution particulière de (E). Soit z est une solution générale de (E_0) alors $f = z + y$ vérifie :

$$a(x)f' + b(x)f = c(x)$$

donc c'est bien une solution de (E). Réciproquement, si f est une solution de (E) alors $f - y$ est une solution de (E_0) et donc $f - y = z$! donc toute solution de (E) s'obtient bien de cette manière.

Théorème 3.3.3 *1. Si $z = f(x)$ est une solution particulière non nulle de (E_0), toute autre solution de (E_0) s'écrit $z = kf(x)$ où k est une constante réel.*

2. La solution générale de l'équation (E_0) est $y = ke^{H(x)}$ où H est une primitive de la fonction $h(x) = -\dfrac{b(x)}{a(x)}$.

Sur tout intervalle I où la fonction a ne s'annule pas, l'équation (E_0) s'écrit :

$$\frac{y'}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}$$

Donc si H est une primitive de la fonction $h(x) = -\dfrac{b(x)}{a(x)}$, les solutions de (E_0) sont les fonctions $y = f(x)$ vérifiant

$$\ln|y| = H(x) + \text{Cste}$$

c'est à dire :

$$y = ke^{H(x)}$$

où $k \in \mathbb{R}$.

En pratique, la résolution de l'équation

$$(E) \quad a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

se fait comme suit. Posons comme ci-dessus

$$(E_0) \quad a(x)y' + b(x)y = 0$$

l'équation sans second membre. On pose $v(x) = e^{H(x)}$ où H est un primitive de $h(x) = -\dfrac{b(x)}{a(x)}$. Ainsi $v(x)$ est solution de (E_0).

On cherche une solution de (E) sous la forme $y = u(x)v(x)$, on obtient :

$$a(u'v + uv') + buv = c$$

c'est à dire

$$avu' + u(av' + bv) = c$$

v étant solution de (E_0), on obtient :

$$avu' = c$$

ou encore

$$u' = \frac{c}{a}e^{-H}$$

Soit alors U une primitive de la fonction $\dfrac{c(x)}{a(x)}e^{-H(x)}$, les solutions de (E) sont les fonctions

$$y = (U(x) + k)v(x)$$

$U(x)v(x)$ correspond à la solution particulière de (E), $kv(x)$ à la solution générale de (E_0).

Exemple 3.3.4 On considère l'équation

$$(E) \quad y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$$

Posons $y = uv$, l'équation se réecrit alors

$$u'v + u(v' - \frac{2}{x+1}v) = (x+1)^3 \quad (\star)$$

On cherche v comme solution de l'équation sans second membre c'est à dire :

$$v' = \frac{2}{x+1}v$$

On obtient

$$\ln|v| = \ln(x+1)^2$$

et on peut prendre

$$v = (x+1)^2$$

Dans $(\star)$, il suit alors :

$$u'(x+1)^2 = (x+1)^3$$

et donc :

$$u = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \text{Cste}$$

La solution générale de (E) est donc :

$$y = \frac{1}{2}(x+1)^4 + k(x+1)^2$$

Si on impose en plus la condition initiale $(x_0, y_0) = (0, 3)$, on obtient $k = \dfrac{5}{2}$ et alors :

$$y = \frac{1}{2}(x+1)^4 + \frac{5}{2}(x+1)^2$$

Exemple 3.3.5 On considère l'équation

$$(E) \quad (\cos x)y' + (\sin x)y = 1$$

Posons $y = uv$, avec v solution de l'équation sans second membe (E_0) c'est à dire

$$(\cos x)v' + (\sin x)v = 0$$

Ainsi :

$$\frac{v'}{v} = -\mathrm{tg}(x)$$

donc

$$\ln|v| = \ln|\cos(x)| + \mathrm{Cste}$$

On obtient par exemple :

$$v = \cos(x)$$

En revenant à l'équation (E), il suit :

$$\cos(x)(u'v + uv') + \sin(x)uv = 1$$

soit encore

$$\cos(x)u'v + u(\cos(x)v' - \sin(x)v) = 1$$

donc

$$\cos(x)u'v = 1$$

soit encore

$$ku'(\cos^2 x) = 1$$

On obtient alors :

$$u = \mathrm{tg}(x) + k$$

Donc

$$y = uv = \sin(x) + k\cos(x)$$