

Starter ST
COURS DE MATHÉMATIQUES

Nicolas JACON

Université de Franche Comté

Table des matières

1	Logique et Théorie des ensembles	4
1.1	Quelques notions de logique Mathématiques	4
1.1.A	La notion de Proposition	4
1.1.B	Les connecteurs logiques	5
1.1.C	Exercices	7
1.2	Les techniques de démonstration	8
1.2.A	La preuve directe	8
1.2.B	La preuve par contraposée	9
1.2.C	La preuve par l'absurde	9
1.2.D	La preuve par récurrence	10
1.2.E	Exercices	11
1.3	Ensembles et quantificateurs	12
1.3.A	Eléments et ensembles	12
1.3.B	Quantificateurs	14
1.3.C	Quantificateurs et négations	14
1.3.D	Exercices	15
1.4	Exercices de Synthèse	16
2	Polynômes	18
2.1	Généralités	18
2.1.A	Définitions	18
2.1.B	Opérations sur les polynômes	19
2.1.C	Racines d'un polynôme	20
2.1.D	Le théorème de d'Alembert-Gauss	22
2.1.E	Exercices	22
2.2	Fractions rationnelles	23
2.2.A	Définition	23
2.2.B	Transformation de fractions rationnelles	24
2.2.C	Division selon les puissances croissantes	24
2.2.D	Exercices	25
2.3	Exercices de synthèse	25

Table des Matières

3 Applications	26
3.1 Définitions et propriétés	26
3.1.A Application d'un ensemble dans un autre	26
3.1.B Composition d'applications	27
3.1.C Restriction d'une application	28
3.1.D Image et image réciproque	28
3.1.E Exercices	29
3.2 Injections et surjections	29
3.2.A Applications injectives	29
3.2.B Applications surjectives	30
3.2.C Applications bijectives	30
3.2.D Exercices	30
3.3 Exercices de synthèse	31
4 Systèmes linéaires	32
4.1 Généralités	32
4.2 Méthodes de résolution	33
4.3 Exercices de Synthèse	35
5 Matrices	36
5.1 Généralités	36
5.1.A Qu'est ce qu'une Matrice ?	36
5.1.B Opérations sur les matrices	36
5.1.C Matrice identité	38
5.1.D Exercices	38
5.2 Inversions de matrices	39
5.2.A Inverse d'une matrice	39
5.2.B Lien avec les systèmes linéaires	40
5.2.C Exercices	42

Chapitre 1

Logique et Théorie des ensembles

1.1 Quelques notions de logique Mathématiques

1.1.A La notion de Proposition

Un cours de Mathématiques est constitué d'une suite d'énoncés, généralement appelés propositions et définitions. Qu'est ce qu'une proposition? c'est un énoncé dont on peut affirmer sans ambiguïté si il est vrai ou si il est faux.

Exemple 1.1.1 “ $2 < 3$ ” est une proposition qui est vrai, “ 5 est le carré d'un nombre entier” en est également une (et elle est fausse),

Certaines propositions peuvent dépendre d'une variable, par exemple la proposition “soit x un nombre réel donné, $2x = 5$ ” dépend de x . On note alors : “ $P(x) : x \in \mathbb{R}, 2x=5$ ” et on dit que $P(\frac{5}{2})$ est vrai.

Si P est une proposition, l'énoncé “Il n'est pas vrai que P ” en est une autre. C'est la négation de P et elle est noté “non(P)”.¹ C'est une proposition vrai si P est fausse et fausse si P est vrai. En utilisant les abréviations V pour vrai et F pour Faux, ceci se résume par le tableau suivant, appelée *table de vérité* :

P	Q
V	F
F	V

¹En pratique, on tente de simplifier les énoncés au maximum. On gardera donc rarement un énoncé de négation sous la forme donnée ici

Exemple 1.1.2 *La négation de $2 < 3$ est $2 \geq 3$ (qui est l'énoncé simplifié de "Il n'est pas vrai que $2 < 3$ ") et c'est une proposition fausse, la négation de "5 est le carré d'un nombre entier" est "5 n'est pas le carré d'un nombre entier" et c'est une proposition vrai.*

Les négations des exemples ci-dessus sont aisés à obtenir. Mais il arrive que ce soit beaucoup plus compliqué, par exemple, comment obtenir la négation de : "Si tu échoues à ton examen ou si tu ne fais pas tes exercices alors ton enseignant sera très triste" ??? nous verrons ceci un peu plus loin.

1.1.B Les connecteurs logiques

A deux propositions P et Q , on peut parfois associer une troisième proposition R . On dit qu'on définit un connecteur logique entre ces deux propositions. Afin d'établir la véracité de la nouvelle proposition, on construit une table de vérité en considérant tous les cas possibles. Si on dispose de deux propositions, on en a quatre : soit les deux propositions sont vrai soit elles sont toutes les deux fausses, soit l'une est vrai l'autre est fausse soit l'une est fausse et l'autre est vrai. Notre table de vérité comprendra donc 4 lignes.

Même s'il n'est associé qu'à une proposition, la négation "non" est aussi vu comme connecteur logique. On a déjà donné la table de vérité associée (qui contient donc deux lignes puisque l'on a que deux cas possibles!). Voici d'autres connecteurs usuels

- La disjonction : la disjonction de deux propositions P et Q est la proposition notée " P ou Q ". Elle est vrai si et seulement si l'une des deux propositions est vrai. Voici donc sa table de vérité

P	Q	P ou Q
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

Par exemple, la proposition "0 est un nombre strictement positif ou strictement négatif" est fausse si et seulement les deux propositions contenues sont fausses c'est à dire si 0 n'est ni strictement négatif ni strictement positif, elle est donc fausse.

Remarque 1.1.3 Attention, en Mathématiques, le "ou" est toujours inclusif, c'est à dire que si les deux propositions sont vrai alors le " P ou Q " est aussi vrai. Ainsi, par exemple : " $2 < 3$ ou 2 est un nombre pair" est une proposition vrai.

1.1. Quelques notions de logique Mathématiques

- La conjonction : la conjonction de deux propositions P et Q est la proposition notée “ P et Q ”. Elle est vrai si et seulement si les deux propositions sont vrai. Voici donc sa table de vérité

P	Q	P et Q
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

Par exemple, la proposition “ $2 < 3$ et 3 est un nombre pair” est fausse car 3 est impair : une des propositions est toujours fausse.

- L’implication : l’implication de P vers Q noté “ $P \Rightarrow Q$ ” est la proposition “(non(P))ou Q ”. Sa table de vérité est donc :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

Par exemple, soit P la proposition “j’ai mon permis de conduire”, soit Q la proposition “J’ai au moins 18 ans”. La proposition “ $P \Rightarrow Q$ ” correspond donc à la proposition “J’ai mon permis de conduire donc j’ai au moins 18 ans”. D’après la table de vérité, cette proposition est fausse seulement dans le cas où P est vrai c’est à dire si “j’ai mon permis de conduire” et Q est fausse c’est à dire “j’ai moins de 18 ans”. Comme c’est impossible “ $P \Rightarrow Q$ ” est vrai.

- L’équivalence : l’équivalence de deux propositions P et Q noté “ $P \iff Q$ ” est vrai si les deux propositions sont vrai ou si les deux propositions sont fausses. Sa table de vérité est donc :

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

Reprenons l’exemple ci-dessus. L’équivalence “J’ai mon permis de conduire si et seulement si j’ai au moins de 18 ans” est fausse car avoir au moins 18 ans n’implique pas le fait d’avoir le permis ...

A quoi serve ces tables de vérités? une des principales applications est qu’elles permettent de simplifier certains énoncés et d’aborder de nouvelles

1.1. Quelques notions de logique Mathématiques

techniques de démonstration. Nous citons deux des plus courantes que nous retrouverons par la suite.

- Soient P et Q deux propositions, montrons que

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P))$$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\text{non}(P)$	$\text{non}(Q)$	$\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$
V	V	V	F	F	V
F	V	V	V	F	V
V	F	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V

Ainsi la proposition $(P \Rightarrow Q)$ est équivalente à la proposition $(\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P))$. Ceci nous sera utile dans le paragraphe §1.2.B.

- Soient P et Q deux propositions, montrons que

$$(P \Rightarrow Q) \iff \text{non}(P \text{ et } \text{non}(Q))$$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\text{non}(Q)$	$(P \text{ et } \text{non}(Q))$	$\text{non}(P \text{ et } \text{non}(Q))$
V	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	F	V

Ainsi la proposition $(P \Rightarrow Q)$ est équivalente à la proposition $\text{non}(P \text{ et } \text{non}(Q))$. Ceci nous sera utile dans le paragraphe §1.2.C.

Attention, lorsque on veut construire une table de vérité impliquant 3 propositions, on a 2^3 cas possibles à considérer. La table de vérité contiendra donc autant de lignes.

1.1.C Exercices

Exercice 1.1.4 Soient P et Q deux propositions, montrer que

$$\text{non}(P \text{ et } Q) \iff (\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q))$$

puis que

$$\text{non}(P \text{ ou } Q) \iff (\text{non}(P) \text{ et } \text{non}(Q))$$

Quelle est la négation des propositions suivantes ?

(a) Si une fonction est dérivable, elle est continue.

(b) Si un entier est divisible par 4, il est pair.

1.2. Les techniques de démonstration

- (c) Si un entier naturel est divisible par 4 et par 3, il est divisible par 12.
- (d) Pour toute fonction f dérivable sur \mathbb{R} , si f admet un maximum positif et un minimum négatif alors il existe un point $x \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 0$.
- (e) “Si tu échoues à ton examen ou si tu ne fais pas tes exercices alors ton enseignant sera très triste”
- (f) Retrouver le fait que

$$(P \Rightarrow Q) \iff \text{non}(P \text{ et } \text{non}(Q))$$

Exemple 1.1.5 :

Soient P et Q deux propositions, montrer que $(P \text{ et } (P \text{ ou } Q)) \iff P$.

Exercice 1.1.6 Soient P, Q et R trois propositions, montrer que

$$(P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

puis que

$$(P \iff Q \text{ et } Q \iff R) \Rightarrow (P \iff R)$$

On parle ici de transitivité de l'implication et de l'équivalence.

Exercice 1.1.7 Ecrire la réciproque puis la contraposée des implications suivantes

1. Si $2 + 2 = 5$ alors je suis le roi de Prusse,
2. S'il fait beau et si je ne suis pas trop fatigué alors j'irai me promener,
3. Si je gagne au loto alors je sable le champagne et je m'achète une voiture.

1.2 Les techniques de démonstration

En Mathématiques, on cherche donc à établir la véracité de propositions. Pour ceci, on peut s'aider de différents raisonnements.

1.2.A La preuve directe

On raisonne ici à l'aide d'une succession d'implications déjà établies en partant de l'hypothèse de la proposition. Par exemple, on considère la proposition suivante :

“ a et b étant deux nombres entiers naturels, montrer que si $a = b$ alors $a^2 = b^2$ ”

1.2. Les techniques de démonstration

Une démonstration possible effectuée grâce à une preuve directe est : si $a = b$ alors $a - b = 0$. Si $a - b = 0$ alors $(a - b)(a - b) = 0$. Comme $(a - b)(a - b) = a^2 - b^2$, on obtient $a^2 - b^2 = 0$. Si on a $a^2 - b^2 = 0$ alors $a^2 = b^2$.

1.2.B La preuve par contraposée

Soient P et Q deux propositions, pour démontrer $P \Rightarrow Q$, on démontre $(\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P))$. Ces deux propositions sont bien équivalentes d'après §1.1.B. Par exemple, on considère la proposition suivante :

“ Si a et b sont deux nombres distincts strictement positifs alors $\sqrt{a^2 + 1}$ et $\sqrt{b^2 + 1}$ sont différents”

Pour montrer cette proposition, on raisonne par contraposée. On suppose donc que la négation de “ $\sqrt{a^2 + 1}$ et $\sqrt{b^2 + 1}$ sont différents”. On suppose donc que $\sqrt{a^2 + 1}$ et $\sqrt{b^2 + 1}$ sont égales. On veut montrer la négation de “ a et b sont deux nombres distincts strictement positifs”. On veut donc montrer que a et b sont égales ou que les nombres a et b ne sont pas strictement positifs.

Si $\sqrt{a^2 + 1} = \sqrt{b^2 + 1}$ alors $\sqrt{a^2 + 1}^2 = \sqrt{b^2 + 1}^2$ alors $a^2 + 1 = b^2 + 1$ alors $a^2 = b^2$ alors soit $a = b$ soit $a = -b$. Si $a = b$ alors a et b sont égaux. Si $a = -b$ alors soit $a = -b = 0$ et a et b sont égaux soit a et b ont des signes distincts donc a et b ne sont pas strictement positifs.

1.2.C La preuve par l'absurde

La preuve par l'absurde est souvent confondue (à tort!) avec la preuve par contraposée. Si P et Q sont deux propositions on sait que $(P \Rightarrow Q)$ est équivalent à $(\text{non}(P) \vee \text{non}(Q))$. Pour montrer cette proposition, on suppose donc P et la négation de Q et on montre qu'on arrive à une contradiction.

Par exemple, on considère la proposition suivante :

“ L'ensemble des nombres premiers est infini.”²

Montrons que cette proposition est vraie. Pour ceci, on raisonne par l'absurde, La proposition P désignera “ \mathcal{P} est l'ensemble des nombres premiers”, la proposition Q désignera “ \mathcal{P} est un ensemble fini”. On suppose donc P et $\text{non}(Q)$ c'est à dire que “L'ensemble \mathcal{P} des nombres premiers est un ensemble fini”. On note alors p_1, p_2, \dots, p_n les nombres premiers, n désignant le nombre de nombres premiers. Soit $N = p_1 \dots p_n + 1$. Ce nombre est plus grand que tous les nombres premiers p_1, \dots, p_n , il n'est donc pas premier. Donc, il y a

²Un nombre premier est un nombre entier divisible seulement par 1 et par lui-même

un nombre premier p_i qui le divise. Alors ce nombre premier divise aussi $1 = N - p_1 \dots p_n$ ce qui est absurde. On conclut donc que l'ensemble des nombres premiers est bien un ensemble fini.

1.2.D La preuve par récurrence

Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier n . Soit n_0 un entier quelconque. La démonstration par récurrence concerne les propositions du type

“ $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$ ”

Pour montrer que $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$, il suffit de montrer que

1. $P(n_0)$ est vrai ; c'est l'initialisation.
2. $P(n)$ entraîne $P(n + 1)$ pour tout $n \geq n_0$; c'est le pas de récurrence.

Ainsi, comme $P(n_0)$ est vrai, en utilisant 2, $P(n_0 + 1)$ est vrai, puis en posant $n = n_0 + 1$ et en utilisant 2, on obtient que $P(n_0 + 2)$ est vrai et on peut continuer comme ceci infiniment ... ce qui prouve que $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$.

Exemple 1.2.1 On veut montrer que $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$, pour tout $n \geq 1$.

On procède par récurrence sur n .

1. *Initialisation* : on doit montrer que $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ pour $n = 1$. On

a $\sum_{i=1}^n i = \sum_{i=1}^1 i = 1$ et $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$, ce qui montre que le résultat est vrai pour $n = 1$.

2. On suppose $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ et on doit montrer $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

On a $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^n i + (n+1)$. Par hypothèse de récurrence, on a $\sum_{i=1}^n i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$. Or $\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ ce qui montre le pas de récurrence.

Attention, lors d'une récurrence, il arrive parfois qu'on ait besoin d'utiliser $P(n)$ et $P(n + 1)$ afin de prouver $P(n + 2)$. Dans ce cas, on doit OBLIGATOIREMENT initialiser avec $P(n_0)$ et $P(n_0 + 1)$. De même si on utilise trois valeurs consécutives $P(n - 2)$, $P(n - 1)$ et $P(n)$, on doit initialiser avec les trois premiers termes.

1.2.E Exercices

Exercice 1.2.2 *Le but de cet exercice est de montrer par une preuve par l'absurde que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, c'est à dire qu'il ne peut pas s'écrire sous forme de fractions.*

1. *Montrer que si p est un nombre entier tel que p^2 est un nombre pair alors p est nécessairement un nombre pair.*
2. *On suppose que $\sqrt{2}$ s'écrit sous la forme p/q où p et q sont premiers entre eux c'est à dire qu'ils n'ont pas de diviseurs communs).*
 - (a) *Que peut-on dire sur p^2 ? et sur q^2*
 - (b) *Montrer que l'on obtient une contradiction.*
3. *Conclure.*

Exercice 1.2.3 *Montrer que si $\sin(x) \neq \frac{1}{2}$ alors $x \neq \frac{\pi}{6}$.*

Exercice 1.2.4 *Montrer que pour tout $n > 0$, on a*

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 1.2.5 *Montrez que pour tout réel positif a et tout entier , $n \in \mathbb{N}$, on a $(1+a)^n \geq 1+na$*

Exercice 1.2.6 *Démontrez que pour tout entier $n \geq 1$, $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7.*

Exercice 1.2.7 *Expliquer pourquoi le raisonnement suivant est faux : Pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété $P(n)$: n étudiants portent le même prénom.*

- *$P(1)$ est vrai,*
- *Supposons que $P(n)$ est vrai, et considérons cette fois $n+1$ crayons de couleurs. On en retire 1 : par hypothèse de récurrence, les n crayons restants sont de la même couleur. On repose ce crayon et on en retire un autre, les n nouveaux crayons sont encore de la même couleur. Conclusion : Le premier crayon retiré était bien de la même couleur que les n autres. La propriété est donc vrai pour $n+1$ crayons. . .*

1.3 Ensembles et quantificateurs

1.3.A Éléments et ensembles

Des objets ou des éléments possédant un ensemble de propriétés communes constituent une collection ou un ensemble. Si a est un élément constituant de cet ensemble E , on dit que a appartient à E et on note $a \in E$. Si l'élément b n'appartient pas à l'ensemble E , on note $b \notin E$.

Exemple 1.3.1 \mathbb{N} , l'ensemble \mathcal{P} des nombres premiers, l'ensemble des étudiants sont des exemples d'ensembles. L'élément 2 est dans \mathbb{N} , on a donc $2 \in \mathbb{N}$, le nombre entier 4 n'est pas un nombre premier car il est divisible par 2, on a donc $4 \notin \mathcal{P}$.

Définition 1.3.2 On dit qu'un ensemble A est contenu dans un ensemble B si tout élément de A appartient à B , on note alors $A \subset B$. On dit que A est un sous-ensemble ou une partie de B .

On dit que deux ensembles A et B sont égaux si tout élément de A est un élément de B et si tout élément de B est un élément de A c'est à dire si $A \subset B$ et $B \subset A$. On note $A = B$.

Exemple 1.3.3 1. On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. En effet, si $x \in \mathbb{N}$ alors x est un entier positif donc c'est un entier donc $x \in \mathbb{Z}$.

2. Si A est l'ensemble des étudiants en Mathématiques et B est l'ensemble des étudiants, on a $A \subset B$.

3. Soit $A = \{a, b, c, x\}$ et $B = \{b, c, x, a\}$. On a $A = B$ car tout élément de A est un élément de B et tout élément de B est un élément de A .

Par définition, l'ensemble vide est l'ensemble ne contenant aucun élément, on le note \emptyset et il vérifie $\emptyset \subset A$ pour tout ensemble A .

Si E est un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . C'est donc un ensemble dont les éléments sont des parties de E . Par exemple, si $E = \{a, b\}$, les parties de E sont \emptyset , $\{a\}$, $\{b\}$ et $\{a, b\}$. On a donc

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

Attention! a n'est PAS un élément de $\mathcal{P}(E)$, par contre $\{a\}$ en est un!!

Remarquons qu'en général \emptyset et E sont toujours des parties de E . On a donc toujours $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$

On définit maintenant certaines opérations remarquables sur les ensembles.

1.3. Ensembles et quantificateurs

- Le complémentaire : le complémentaire d'un sous ensemble A dans un ensemble E est l'ensemble de tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A . On le note $C_E(A)$ ou $E \setminus A$. De façon formelle :

$$E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

- La réunion : la réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à A ou à B . On la note $A \cup B$.

$$x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

- L'intersection : l'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B . On la note $A \cap B$.

$$x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B)$$

- Le produit : on appelle couple d'object la donnée de deux objets x et y dans un certain ordre. Ce couple est noté (x, y) . Par définition, deux couples (x, y) et (x', y') sont égaux si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$. Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et de F est l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$. On le note $E \times F$.

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}$$

Par exemple $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$. De même $\mathbb{N} \times \mathbb{R}^* = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{R}^*\}$.

Il est parfois commode de faire des dessins pour bien se représenter des ensembles et les éventuelles égalités entre eux.

Pour démontrer que deux expressions ensemblistes sont égales, on peut aussi utiliser des tables de vérités. Comme on l'a vu, la réunion correspond au connecteur "ou", l'intersection au connecteur "et", le complémentaire à la négation. Faire une table de vérité permet d'identifier tous les cas possibles pour un élément : mettre un V signifie que cet élément appartient à l'ensemble, un F qu'il n'appartient pas. Si deux expressions ont la même table de vérité, ceci signifie qu'elles sont égales.

Exemple 1.3.4 Montrons que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

A	B	C	$A \cup B$	$(A \cup B) \cap C$	$(B \cap C)$	$A \cup (B \cap C)$
V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	F	F	F	F	F	F

1.3. Ensembles et quantificateurs

On voit donc l'égalité de deux ensembles (qui vient de l'associativité du connecteur "ou")

1.3.B Quantificateurs

Dans la suite du cours, on écrira le symbole \forall pour "pour tout" ou "quelque soit". Le symbole \exists signifiera "il existe" tandis que le symbole $\exists!$ (moins utilisé) signifiera "il existe un (ou une) unique". Ce sont des *quantificateurs*. Grâce à ces notations et celles déjà introduites plus haut, la quasi-totalité des propositions peuvent s'écrire facilement, à l'aide donc de ces quantificateurs.

Voici quelques exemples

- La fonction sinus est minorée par -1 et majorée par 1 s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1.$$

- L'équation $x^3 = 2$ a une unique solution réelle

$$\exists! x \in \mathbb{R}, x^3 = 2.$$

- Tout élément de A possède une image par la fonction f négative

$$\forall x \in A, f(x) \leq 0.$$

1.3.C Quantificateurs et négations

Une des principales conséquences de l'introduction de ces quantificateurs est qu'ils vont nous permettre de trouver la négation de certaines propositions relativement facilement. En particulier, lorsqu'on désire montrer qu'une proposition est fautive, on montrera que sa négation est vraie. Il est donc commode de disposer d'un outil nous permettant de trouver ces négations de façon aisée.

Ainsi, soit $P(x)$ une proposition dépendant de x et E un ensemble, alors la négation de la proposition

$$\forall x \in E, P(x)$$

est

$$\exists x \in E, \text{non}(P(x))$$

La négation de la proposition

$$\exists x \in E, P(x)$$

1.3. Ensembles et quantificateurs

est

$$\forall x \in E, \text{non}(P(x))$$

Notez que $\text{non}(\text{non}(P(x)))$ correspond bien à $P(x)$.

Ainsi la négation de

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Z}, y > x$$

est

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{Z}, y \leq x$$

1.3.D Exercices

Exercice 1.3.5 :

Soit $A = \{a, b\}$ où a et b sont deux réels. Les relations suivantes ont-elles un sens ? Effectuer les corrections si nécessaires.

$$\begin{aligned} a \in A \quad a \in \{a\} \quad \emptyset \in A \quad \{a\} \in P(A) \\ \{a\} \in A \quad \{\emptyset\} \in P(A) \quad \{a, b\} = \{b, a\} \quad \{b\} \in A \cup \{b\} \end{aligned}$$

Exercice 1.3.6 :

Ecrire $P(E)$ lorsque $E = \{a\}$, $E = \{a, b\}$ et $E = \{a, b, c\}$.

Exercice 1.3.7 :

Traduire en langage mathématiques avec des quantificateurs les phrases suivantes :

1. Tout nombre réel x positif inférieur à 1 vérifie $x^2 \leq x$.
2. Entre deux réels distincts, on peut toujours trouver un rationnel.
3. Tout point de l'espace est le centre d'une sphère.

Exercice 1.3.8 :

Quelle sont les négation des phrases suivantes ?

1. Tous les lundis, je joue au squash
2. Tous les lundis, je joue au squash et je me douche
3. Tous les lundis où il fait beau, je joue au tennis.
4. Chaque semaine, si je n'ai pas joué au squash, je joue au tennis au moins deux fois.
5. Tous les ans, il y a des semaines où je ne peux pas jouer au squash.

Exercice 1.3.9 :

Ecrire les négations des propositions suivantes :

1. $P \iff Q$ où P et Q désignent deux propositions.
2. $P \implies (\text{non}(Q))$ où P et Q désignent deux propositions.
3. $\exists a \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, |a| \leq \epsilon$.
4. $\forall a \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, |a| \leq \epsilon$.

Exercice 1.3.10 :

Soient A, B et C trois ensembles. Démontrer que

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

puis que

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$$

Exercice 1.3.11 :

1. Montrer que si $A \subset B$ alors $P(A) \subset P(B)$.
2. Montrer :

$$A \subset B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$$

1.4 Exercices de Synthèse

Exercice 1.4.1 *Soient A et B deux parties d'un ensemble E . On appelle différence symétrique l'ensemble $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ et on la note $A \Delta B$.*

- 1) *Faire un diagramme représentant A, B et $A \Delta B$.*
- 2) *Cet ensemble a-t-il un rapport avec le "ou exclusif" ?*
- 3) *Simplifier $(A \Delta B) \cup (A \Delta \bar{B})$.*
- 4) *Cette opération est-elle commutative ?*
- 5) *Calculer $A \Delta A$ et $A \Delta B$ lorsque $A \subset B$.*

Exercice 1.4.2 *On considère les propositions suivantes dépendant des variables x et y (qui sont supposés être des nombres réels)*

$$P1 \quad \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 < 4$$

$$P2 \quad \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 < 4$$

$$P3 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 < 4$$

$$P4 \quad \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 < 4$$

$$P5 \quad \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 < 4$$

1.4. Exercices de Synthèse

$$P6 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 < 4$$

1. Donner la négation de ces propositions.
2. Etudier la véracité de ces propositions.

Exercice 1.4.3 :

On considère la fonction f définie sur $\{1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3, 4\}$ par $f(x, y) = xy$.

1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ?
 - (A1) Si x est pair, $f(x, y)$ est pair.
 - (A2) Si x est impair, $f(x, y)$ est impair.
 - (A3) Si $f(x, y)$ est inférieur ou égal à trois, x est inférieur ou égale à deux.
 - (A4) Si $f(x, y)$ est supérieur strictement à quinze, y vaut 1.
2. Ecrire les négations et les contraposées des propositions ci-dessus et donner leur valeur de vérité.

Exercice 1.4.4 :

Soit E un ensemble, on définit la fonction caractéristique de E par :

$$\xi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que $\xi_A = \xi_B$ si et seulement si $A = B$.
2. Montrer que $\xi_{A \cap B} = \xi_A \xi_B$.
3. Montrer que $\xi_{A \cup B} = \xi_A + \xi_B - \xi_A \xi_B$.

Exercice 1.4.5 :

Soit E, F et G trois ensembles, montrer de deux manières différentes que

$$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$$

Chapitre 2

Polynômes

2.1 Généralités

2.1.A Définitions

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On appelle polynôme à une indéterminée X toute expression de la forme :

$$\sum_{k=0}^n a_k X^k = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$$

où n est un entier naturel et $(a_k)_{k=0, \dots, n}$ est une suite d'éléments de \mathbb{K} . On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} .

Exemple 2.1.1 *0 est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ou de $\mathbb{C}[X]$, c'est le polynôme dont tous ses coefficients sont 0. Le polynôme $1 + 2X + 8X^9$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$ mais aussi de $\mathbb{C}[X]$ (car un nombre réel est aussi un nombre complexe !). Le polynôme $1 + iX + 2X^3$ est quant à lui un élément de $\mathbb{C}[X]$*

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coefficients.

Ainsi, si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et si $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$ sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$

alors :

$$P = Q \iff a_k = b_k \text{ pour } k = 0, 1, \dots, n$$

Définition 2.1.2 Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ que l'on suppose non nul. On note d le plus grand entier tel que $a_d \neq 0$. Cet entier est appelé le degré de P . Par convention, le degré de 0 est $-\infty$.

2.1. Généralités

Un polynôme de degré 0 s'écrit $P = a_0X^0$, on le note simplement $P = a_0$ et on dit que ce polynôme est constant. Un polynôme unitaire est par définition un polynôme non nul où le coefficient a_d de X^d avec $d = \deg(P)$ vérifie $a_d = 1$.

Exemple 2.1.3 *Le polynôme $X^4 + 1$ de $\mathbb{R}[X]$ est de degré 4.*

2.1.B Opérations sur les polynômes

Etant donnés deux polynômes, on désire maintenant les additionner, les multiplier et éventuellement les diviser. Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$ sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ alors on définit $P+Q$ comme étant le polynôme

$$P + Q = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) X^k$$

Exemple 2.1.4 *Soit*

$$P = 1 + X + X^5 \text{ et } Q = X^2 + X^5$$

alors

$$P + Q = 1 + X + X^2 + X^5$$

On a

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$$

L'égalité n'est bien sûr pas vérifiée en général (en effet, si $Q = -P$ pour deux polynômes non nuls, on obtient $\deg(P + Q) = -\infty$)

On peut également multiplier deux polynômes de manière naturelle comme dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 2.1.5 *Soit*

$$P = 1 + X \text{ et } Q = 2 + X^2 + X^3$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} PQ &= (1 + X)(2 + X^2 + X^3) \\ &= 2 + X^2 + X^3 + 2X + X^3 + X^4 \\ &= 2 + 2X + X^2 + 2X^3 + X^4 \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\deg(PQ) = 4 = \deg(P) + \deg(Q)$$

C'est en fait un fait général.

Proposition 2.1.6 Soient P et Q deux polynômes non nuls. On a

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$$

Maintenant comment “diviser” deux polynômes ? il faut tout d’abord s’entendre sur le terme “diviser”. Soient A et B deux polynômes. On suppose que B est non nul. Il existe alors deux polynômes uniques Q et R tels que

$$A = BQ + R \text{ avec } R = 0 \text{ ou } \deg(R) < \deg(B).$$

Ceci est la division euclidienne de A par B . Q est appelé le quotient de la division tandis que R est appelé le reste de celle-ci.

Définition 2.1.7 On dit qu’un polynôme non nul B divise un polynôme A si le reste de la division de A par B est nul.

Exemple 2.1.8 Soit

$$P(X) = X^4 + 2X^2 + 2 \text{ et } B(X) = X^2 + 1.$$

On a

$$P(X) = B(X)(X^2 + 1) + 1$$

Le reste de la division euclidienne de P par B est 1 et le quotient est $(X^2 + 1)$.

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. On note $P(\alpha)$ l’élément

$$P(\alpha) = \sum_{k=0}^n a_k \alpha^k = a_0 + a_1 \alpha + \dots + a_n \alpha^n \in \mathbb{K}$$

On dit que cet élément résulte de la substitution de X par α dans P .

Exemple 2.1.9 Posons $P(X) = 2 - X - X^2$ alors $P(0) = 2$ et $P(1) = 0$. On dit que 1 est une racine de P comme nous allons le voir dans le prochain paragraphe.

2.1.C Racines d’un polynôme

Définition 2.1.10 On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine du polynôme P si on a $P(\alpha) = 0$.

Proposition 2.1.11 Les conditions suivantes sont équivalentes

1. α est une racine de P
2. $X - \alpha$ divise P .

2.1. Généralités

Ainsi, pour montrer que α est une racine d'un polynôme P unitaire, on peut faire la division euclidienne de P par $(X - \alpha)$. D'après la proposition ci-dessus, le reste est nul si et seulement si α est racine de P . Cette méthode permet en outre éventuellement de trouver les autres racines de P qui correspondent aux racines du quotient de cette division euclidienne.

Exemple 2.1.12 *Soit*

$$P = X^3 + X^2 + X + 1$$

-1 est racine de ce polynôme car $P(-1) = 0$. On fait la division euclidienne de P par $(X + 1)$.

$$P = (X + 1)(X^2 + 1)$$

Donc -1 est racine du polynôme $X^3 + X^2 + X + 1$. Les autres racines sont celles du polynôme $X^2 + 1$ c'est à dire i et $-i$. On a donc :

$$X^3 + X^2 + X + 1 = (X + 1)(X + i)(X - i)$$

et donc $-1, i$ et $-i$ sont les seules racines de P .

Définition 2.1.13 On dit qu'un polynôme unitaire P de degré au moins 1 est irréductible s'il ne peut s'écrire comme produit de deux polynômes de degré au moins 1.

Un polynôme unitaire de degré 1 est donc un polynôme irréductible.

Proposition 2.1.14 *Tout polynôme unitaire de degré au moins 1 est le produit de polynôme(s) irréductible(s)*

Exemple 2.1.15 *Dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $X^2 - 2X - 3$ est de degré 2. En calculant le discriminant, on voit que les racines sont -1 et 3 , on a donc :*

$$X^2 - 2X - 3 = (X - 3)(X + 1)$$

$(X - 3)$ et $(X + 1)$ sont de degré 1 et unitaires, ce sont donc des polynômes irréductibles. La décomposition ci-dessus est donc la décomposition en produit de polynômes irréductibles.

Dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $X^2 + 1$ n'a pas de racines réels, il ne peut donc pas s'écrire comme produit de deux polynômes de degré 1. Il est donc irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Par contre, dans $\mathbb{C}[X]$, ce polynôme a deux racines : i et $-i$. On a donc :

$$X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$$

$(X - i)$ et $(X + i)$ sont de degré 1 et unitaire, ce sont donc des polynômes irréductibles. La décomposition ci-dessus est donc la décomposition en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

De l'exemple ci-dessus, on retiendra que la décomposition d'un polynôme en produit de polynôme irréductible dépend du choix de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

2.1.D Le théorème de d'Alembert-Gauss

Le théorème suivant, aussi appelé Théorème fondamental de l'algèbre prouve que dans $\mathbb{C}[X]$, connaître la décomposition d'un polynôme en produit d'irréductibles équivaut à connaître ses racines.

Théorème 2.1.16 (Théorème de d'Alembert-Gauss) *Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur à 1 admet au moins une racine dans \mathbb{C}*

En fait, tout polynôme de degré n admet exactement n racines complexes dans $\mathbb{C}[X]$ comptées avec multiplicité. On dit que α est une racine de multiplicité $a \in \mathbb{N}$ si $(X - \alpha)^a$ divise P mais $(X - \alpha)^{a+1}$ ne divise pas P .

Exemple 2.1.17 *-1 est une racine de multiplicité 1 dans $X^2 - 1$ car $(X - 1)$ divise ce polynôme mais pas $(X - 1)^2$. Par contre, -1 est racine de multiplicité 2 dans $X^2 - 2X + 1$ car ce polynôme est égal à $(X - 1)^2$*

On en déduit une classification des polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Proposition 2.1.18 *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont*

- les polynômes de degré 1,
- les polynômes de degré 2 sans racine réelle, c'est à dire les polynômes du type $aX^2 + bX + c$ avec $b^2 - 4ac < 0$.

Ainsi, lorsqu'on désire effectuer la décomposition d'un polynôme unitaire en produits de polynômes irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$, on doit obtenir

- si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, un produit de polynôme de degré 1 du type $(X - \alpha)$ où α est une racine du polynôme.
- si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, un produit de polynôme de degré 1 du type $(X - \alpha)$ où α est une racine du polynôme et de polynôme de degré 2 à discriminant négatif.

2.1.E Exercices

Exercice 2.1.19 *Effectuer la division euclidienne de $P(X) = X^3 + X^2 - X - 1$ par $X - 1$. En déduire les racines de $P(X)$ dans \mathbb{R} et dans \mathbb{C} . Quel est la décomposition de P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$? et dans $\mathbb{C}[X]$?*

2.2. Fractions rationnelles

Exercice 2.1.20 Soit P un polynôme à coefficients réels. Montre que si z est une racine complexe de ce polynôme alors le conjugué de z l'est aussi. Est ce encore vrai si P est à coefficients complexes ?

Exercice 2.1.21 Soit P un polynôme, déterminer le degré de du polynôme

$$P(X + 1) - P(X)$$

en fonction du degré de P .

Exercice 2.1.22 Expliquer de deux manières différentes pourquoi un polynôme réel de degré impair a forcément une racine réel.

Exercice 2.1.23 Déterminer la décomposition en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ de $X^{10} + X^6$.

2.2 Fractions rationnelles

2.2.A Définition

Une fraction rationnelle se présente sous la forme $\frac{P}{Q}$ où P et Q sont deux polynômes avec $Q \neq 0$. Cette fraction est dite réduite si P et Q n'ont pas de facteurs communs.

Exemple 2.2.1 Les fonctions suivantes sont des exemples de fractions rationnelles :

$$\frac{1+X}{1-X}, \frac{1}{(1-X)(1+X^2)}, \frac{1-X}{(1+X)^2(1-X^2)}.$$

Les deux premières sont réduites tandis que la troisième ne l'est pas, $(1-X)$ étant un facteur commun au numérateur et au dénominateur.

On peut toujours multiplier et ajouter des fractions :

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{PS + QR}{QS} \text{ et } \frac{P}{Q} \cdot \frac{R}{S} = \frac{PR}{QS}$$

Exemple 2.2.2 On a

$$\begin{aligned} \frac{1+X}{1-X} + \frac{1}{(1+X)(1-X)} &= \frac{(1+X)^2}{(1+X)(1-X)} + \frac{1}{(1+X)(1-X)} \\ &= \frac{2+2X+X^2}{(1+X)(1-X)} \end{aligned}$$

2.2.B Transformation de fractions rationnelles

Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$ alors P s'écrit de manière unique comme produit de polynômes irréductibles, c'est à dire

- de polynômes de degré 1,
- et de polynômes de degré 2 à discriminant négatif.

Ainsi, il existe des réels a, b, \dots (qui sont les racines réels de P), des entiers α, β, \dots , des réels p, q, p', q' et des entiers $\delta, \gamma \dots$ tels que :

$$P = (X - a)^\alpha (X - b)^\beta \dots (X + pX + q)^\delta (X^2 + p'X + q')^\lambda$$

où $(X + pX + q)$ et $(X^2 + p'X + q')$ sont des polynômes sans racines réels (et donc à discriminant négatif). Alors, si Q est un polynôme de degré inférieur strictement à P , il existe une unique décomposition

$$\frac{Q}{P} = \frac{A_1}{(X - a)^\alpha} + \frac{A_2}{(X - a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_\alpha}{(X - a)} + \frac{B_1}{(X - b)^\beta} + \dots + \frac{B_\beta}{(X - b)} + \dots + \frac{M_1 X + N_1}{(X^2 + pX + q)^\delta} + \dots + \frac{M_\delta X + N_\delta}{(X^2 + pX + q)} + \frac{M'_1 X + N'_1}{(X^2 + p'X + q')^\lambda} + \dots + \frac{M'_\lambda X + N'_\lambda}{(X^2 + p'X + q')} + \dots$$

Cette propriété est très utile lorsque l'on désire calculer une primitive d'une fraction rationnelle (cf. le cours d'Analyse).

En pratique, pour décomposer une fractions rationnelle du type $\frac{Q}{P}$, on procède en deux étapes :

1. Si $\deg(Q) < \deg(P)$, on passe directement à la seconde étape. Sinon, on fait la division euclidienne de Q par P : il existe A et B tels que $\deg(B) < \deg(P)$ et :

$$Q = PA + B$$

Alors, on obtient :

$$\frac{Q}{P} = A + \frac{B}{P}$$

avec $\deg(B) < \deg(P)$, on peut alors passer à la seconde étape

2. On utilise la formule ci-dessus pour transformer notre fraction rationnelle.

2.2.C Division selon les puissances croissantes

Définition 2.2.3 Soient A et B deux polynômes. On suppose que $B(0) \neq 0$ alors pour tout entier n , il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tels que $A = QB + X^{n+1}R$ et $\deg(Q) \leq n$. On obtient alors la division selon les puissances croissantes à l'ordre n .

2.3. Exercices de synthèse

La division selon les puissances croissantes s'apparente à la division euclidienne où on a renversé l'ordre des facteurs "selon les puissances croissantes".

Exemple 2.2.4 *La division selon les puissances croissantes de $(1 + X)$ par $(1 + X^2)$ à l'ordre 2 donne :*

$$1 + X = (1 + X^2)(1 + X - X^2) + X^3(-1 + X)$$

La division selon les puissances croissantes de $2 + 3X - 3X^3 - 10X^4 + 8X^5$ par $1 + X - 2X^2$ à l'ordre 3 donne :

$$2 + 3X - 3X^3 - 10X^4 + 8X^5 = (1 + X - 2X^2)(2 + X + 3X^2 - 4X^3)$$

ce qui implique que $2 + 3X - 3X^3 - 10X^4 + 8X^5$ est divisible par $1 + X - 2X^2$.

2.2.D Exercices

Exercice 2.2.5 *Effectuer la division selon les puissances croissantes de $P = 1 + X$ par $Q = 1 + X^2$ l'ordre 5, puis de $P = X - \frac{X^3}{6} + \frac{X^5}{12}$ par $Q = 1 - 2X^2 + X^4$ l'ordre 5.*

2.3 Exercices de synthèse

Exercice 2.3.1 *Effectuer la division euclidienne de*

$$P = 2X^5 - 4X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 5X - 4$$

par

$$X^2 - 2X - 1.$$

En déduire la valeur de P en $1 + \sqrt{2}$.

Exercice 2.3.2 *Trouver tous les polynômes unitaires de degré 3 possédant 1 comme racine, n'ayant que des racines entières et tels que le produit de ses trois racines vaut 1.*

Chapitre 3

Applications

3.1 Définitions et propriétés

3.1.A Application d'un ensemble dans un autre

On commence par la définition d'une application.

Définition 3.1.1 Soient E et F deux ensembles. Une application f de E dans F associe à chaque élément x de E un unique élément de F noté $f(x)$. On note

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

L'ensemble E est appelé l'ensemble de départ de f et l'ensemble F , l'ensemble d'arrivée. Si $x \in E$, l'élément $f(x) \in F$ est appelé l'image de x par f . Si $y \in F$ et si x est un élément de E tel que $f(x) = y$, on dit que x est un antécédent de y .

Pour dire que f est une fonction de E dans F , on écrit $f : E \rightarrow F$. Pour donner sa définition, on écrit $f(x) = \dots$

Attention, par définition, à chaque élément de E est associé une unique image. Par contre, un élément de F peut très bien ne pas posséder d'antécédent ou bien en posséder plusieurs. Ce sont ces remarques qui justifieront plus tard l'introduction des termes de surjectivité et d'injectivité.

Exemple 3.1.2 *L'application*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

3.1. Définitions et propriétés

est l'application "valeur absolue". Elle associe bien à chaque élément de \mathbb{R} (l'espace de départ) un unique élément de \mathbb{R} (l'espace d'arrivée).

Comment vérifier maintenant que deux applications sont égales? Soient donc E, F, E', F' quatre ensembles et soient $f : E \rightarrow F$ et $g : E' \rightarrow F'$ deux applications. On dit que f et g sont égales si on a $E = E', F = F'$ et si pour tout $x \in E$, on a $f(x) = g(x)$.

3.1.B Composition d'applications

Soient E, F et G trois ensembles et soit f une application de E dans F et g une application de F dans G . A $x \in E$ correspond un unique élément $y = f(x)$ de F . A $y \in F$ correspond un unique élément $g(y)$ de G . Donc, à $x \in E$, on a associé un unique élément de G qui est $g(y) = g(f(x))$.

On vient donc de définir à partir de f et de g une application que l'on notera $g \circ f$. On a :

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\rightarrow G \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

Attention, notez bien que pour définir une telle application, l'espace d'arrivée de f doit être le même que l'espace de départ de g . Afin d'éviter tout risque de confusion, on peut se servir du "diagramme" suivant qui nous assure que $g \circ f$ est bien défini.

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

Exemple 3.1.3 Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x + 2 \end{aligned}$$

alors $g \circ f$ est bien défini :

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^+ \xrightarrow{f} \mathbb{R}^+$$

Et si $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x + 2) \\ &= (x + 2)^2 \\ &= x^2 + 4x + 4 \end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} f \circ g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 + 4x + 4 \end{aligned}$$

3.1.C Restriction d'une application

Soit f une application de E dans F . Soit A une partie de E , on note $f|_A$ l'application

$$f|_A : A \rightarrow F$$

telle que pour tout $x \in A$, on a $f|_A(x) = f(x)$. Cette application est appelée la restriction de f à A .

Exemple 3.1.4 Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto |x| \end{aligned}$$

l'application valeur absolue. On peut considérer la restriction de cette application à \mathbb{R}^+ . Celle-ci est en fait tout simplement l'application

$$\begin{aligned} f|_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

3.1.D Image et image réciproque

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$ une application. Nous allons associer à toute partie de E une partie de F et à toute partie de F , une partie de E .

- Si A est une partie de E , on définit

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset F.$$

C'est l'image de A , l'ensemble de toutes les images par f des éléments de A .

- Si A est une partie de F , on définit

$$f^{-1}(A) = \{x \in E \mid f(x) \in A\} \subset E.$$

C'est l'image réciproque de A par E , l'ensemble de tous les antécédents des éléments de A .

Exemple 3.1.5 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 2x^2 + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$\begin{aligned} f(\{1\}) &= \{3\} \\ f([0, 3]) &= [1, 19] \\ f^{-1}(\{5\}) &= \{2, -2\} \\ f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) &= \emptyset \end{aligned}$$

3.1.E Exercices

Exercice 3.1.6 Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 + x + 2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos(x) \end{aligned}$$

Calculer $f \circ g$.

Exercice 3.1.7 Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos(x) \end{aligned}$$

Calculer

$$f([0, 2\pi]), f([0, \pi]), f([0, 4\pi]), f^{-1}(\{0\}), f^{-1}([-1, 1])$$

3.2 Injections et surjections

3.2.A Applications injectives

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est injective si pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution. Autrement dit, f est injective si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

ou bien encore si tout élément de F possède au plus un antécédent.

Exemple 3.2.1 L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 2x$ est injective. En effet, supposons que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est tel que

$$f(x) = f(y)$$

alors on obtient $2x = 2y$ c'est à dire $x = y$.

Par contre, l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$ n'est pas injective. En effet, on a $f(1) = f(-1)$ avec $1 \neq -1$ et 1 possède donc deux antécédents.

3.2.B Applications surjectives

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est surjective si pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution. Autrement dit, f est surjective si et seulement si

$$\forall y \in F, \exists x \in E f(x) = y$$

ou bien encore si tout élément de F possède au moins un antécédent.

Exemple 3.2.2 *L'application*

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

est une application surjective tandis que

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

ne l'est pas.

3.2.C Applications bijectives

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est surjective si pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ admet exactement une solution. Autrement dit, f est surjective si et seulement si f est à la fois injective et surjective ou bien encore si tout élément de F possède exactement un antécédent.

Attention, la surjectivité, l'injectivité et la bijectivité d'une application dépendent fortement de l'espace de départ et de l'espace d'arrivée !

3.2.D Exercices

Exercice 3.2.3 *Ecrire la négation de la définition d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité.*

Exercice 3.2.4 *Soient E et F deux sous-ensembles de \mathbb{R} et soit*

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Donner des exemples pour E et F induisant l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité puis la non injectivité, la non surjectivité, la non bijectivité de l'application.

Exercice 3.2.5 Soient E et F deux ensembles et soit

$$f : E \rightarrow F$$

une application. Montrer que f est injective si et seulement si pour tout $x \in E$, $f^{-1}(\{x\})$ contient au plus un élément.

Exercice 3.2.6 Soient E et F deux ensembles et soit

$$f : E \rightarrow F$$

une application. Montrer que f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

3.3 Exercices de synthèse

Exercice 3.3.1 Soient E , F et G trois ensembles. Soit f une application de E dans F et g une application de E dans G . On considère h de E dans $F \times G$ définie par

$$\forall x \in E, h(x) = (f(x), g(x))$$

On suppose que f est injective, que peut-on dire de h ? et si f et g sont surjectives?

Exercice 3.3.2 Soient A et B deux parties d'un ensemble E . On note $\mathfrak{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathfrak{P}(E) &\rightarrow \mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(B) \\ X &\mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{aligned}$$

1. (a) Calculer $f(E)$ et $f(A \cup B)$
 (b) En déduire que si f est injective alors $A \cup B = E$.
 (c) Réciproquement montrer que si $A \cup B = E$ alors f est injective.
2. (a) On suppose que f est surjective. En considérant les parties X de E telles que $f(X) = (A, \emptyset)$, montrer que $A \cap B = \emptyset$.
 (b) Réciproquement, on suppose $A \cap B = \emptyset$. Soient $Y \in \mathfrak{P}(A)$ et $Z \in \mathfrak{P}(B)$. Montrer que $f(Y \cup Z) = (Y, Z)$ et que f est surjective.
 (c) Donner une CNS pour que f soit bijective.

Chapitre 4

Systemes linéaires

4.1 Généralités

Un système linéaire est un ensemble d'équations

$$\begin{cases} a_{11}X + a_{12}X_2 + \dots + a_{1m}X_m = b_1 \\ a_{21}X + a_{22}X_2 + \dots + a_{2m}X_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}X + a_{p2}X_2 + \dots + a_{pm}X_m = b_p \end{cases}$$

où les a_{ij} sont des coefficients (réels ou complexes), les b_k sont les second membres (réels ou complexes) et les X_i sont les inconnues.

Une solution de ce système est un m -uplet (x_1, \dots, x_m) vérifiant les p équations ci-dessus.

Exemple 4.1.1 *Le système*

$$\begin{cases} X + 2X_2 + 3X_3 = 4 \\ 2X + 3X_2 + 4X_3 = 5 \\ 3X + 4X_2 + 5X_3 = 6 \end{cases}$$

est une solution. Le triplet $(-1, 1, 1)$ en est une autre.

Le but de ce chapitre est de donner une méthode général de résolution pour un système linéaire. Cette résolution est aisée dans le cas particulier où les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- les nombres p et q sont égaux,
- pour tout $i = 1, \dots, m$, on a $a_{ii} \neq 0$.
- Si $i > j$ alors $a_{ij} = 0$.

4.2. Méthodes de résolution

soit encore

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 4 \\ X_2 + 2X_3 = 3 \\ -2X_2 - 4X_3 = -6 \end{cases}$$

On choisit maintenant X_2 comme pivot. On veut donc éliminer X_2 de la troisième équation. Pour ceci, on doit ajouter deux fois la deuxième équation à la troisième. On obtient :

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 4 \\ X_2 + 2X_3 = 3 \\ (-4 + 2 \times 2)X_3 = (-6 + 3 \times 2) \end{cases}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 4 \\ X_2 + 2X_3 = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On a terminé la première partie. La troisième équation est triviale, on se reporte donc sur la deuxième équation où X_2 s'exprime en fonction de X_3 . Ensuite, X_1 dans la première équation s'exprime en fonction de X_3 . Il suit :

$$\begin{cases} X_1 = -2 + X_3 \\ X_2 = 3 - 2X_3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble

$$\{(x_3 - 2, -2x_3 + 3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$$

D'autres cas peuvent se produire. Par exemple, le système linéaire :

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 4 \\ 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 = 5 \\ 3X_1 + 4X_2 + 5X_3 = 0 \end{cases}$$

mène à :

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 4 \\ X_2 + 2X_3 = 3 \\ 0 = -6 \end{cases}$$

La dernière égalité étant absurde, ceci signifie que le système linéaire n'a pas de solutions. Enfin, le troisième cas (et le plus "commun") correspond à un système du type :

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 4 \\ 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 = 5 \\ X_1 + 4X_2 + 5X_3 = 0 \end{cases}$$

On arrive, après réduction au système :

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + 3X_3 & = 4 \\ X_2 + 2X_3 & = 3 \\ -2X_3 & = -10 \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} X_1 & = 3 \\ X_2 & = -7 \\ X_3 & = 5 \end{cases}$$

On a donc une unique solution qui est $(3, -7, 5)$.

4.3 Exercices de Synthèse

Exercice 4.3.1 *Résoudre les systèmes suivants*

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ x - 8y + 8z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 5y + 3z = 0 \\ 3x - y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Exercice 4.3.2 *Soit deux nombres complexes a et d . Discuter, suivant leurs valeurs, l'existence de solution(s) pour le système suivant. Lorsqu'une ou des solutions existent, préciser leur(s) valeur(s) (en fonction de a et d).*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + az = d \\ x + y + a^2z = d^2 \end{cases}$$

Chapitre 5

Matrices

5.1 Généralités

5.1.A Qu'est ce qu'une Matrice ?

On se donne p et m deux entiers. Une matrice à p lignes et m colonnes est un tableau à p lignes et m colonnes contenant des nombres complexes ou réels :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Voici une matrice à deux lignes et trois colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 & \pi & 0 \\ 2 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Un coefficient quelconque d'une matrice est noté a_{ij} , i est le numéro de ligne où se trouve le coefficient et j est le numéro de colonne de celui-ci. La matrice associée est alors noté $(a_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m}$.

5.1.B Opérations sur les matrices

On peut naturellement additionner deux matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m}$ si elles ont le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes :

$$C = A + B \text{ où } C = (a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m}$$

5.1. Généralités

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette opération est associative c'est à dire que pour trois matrices A , B et C à p lignes et n colonnes, on a

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

On peut naturellement multiplier une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m}$ par un scalaire α . On obtient une matrice à p lignes et m colonnes :

$$\alpha.A = (\alpha a_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m}$$

Par exemple :

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

On peut enfin multiplier deux matrices. Cette opération est un peu plus délicate à effectuer : soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. Alors le produit de A et de B noté AB est une matrice à p lignes et n colonnes définie par $AB = (c_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$ et telle que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$

pour tout $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq n$

Noter bien que pour que deux matrices soient multipliables, il faut que le nombre de colonnes de la matrice A soit égale au nombre de lignes de la matrice B .

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Par contre, les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas multipliables.

5.1. Généralités

L'opération de multiplication est aussi associative, si A est une matrice à p lignes et q colonnes, B une matrice à q lignes et r colonnes et C une matrice à r lignes et n colonnes, on a :

$$A(BC) = (AB)C$$

Il est important de noter que le produit de deux matrices n'est pas commutatif en général. Tout d'abord, pour que le produit AB et BA ait un sens, il faut déjà que ces deux matrices aient le même nombre de ligne que de colonnes (on dit d'une telle matrice qu'elle est carrée). Pourtant, même dans ce cas, on a

$$AB \neq BA$$

en général.

5.1.C Matrice identité

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la matrice I dont tous les coefficients sont nuls excepté les coefficient diagonaux égaux à 1. Autrement dit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que pour toute matrice A à n lignes et n colonnes, on a

$$A.I = I.A = A$$

ceci justifie l'appellation de cette matrice : on la nomme matrice identité.

5.1.D Exercices

Exercice 5.1.1 Soient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer :

$$(A + B).C \text{ et } AC + BC$$

Que remarque t-on ? est ce un fait général ?

5.2. Inversions de matrices

Exercice 5.1.2 Pour $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m}$ une matrice à p lignes et m colonnes, on définit sa transposée A^t comme étant la matrice $A^t = (a'_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p}$ telle que

$$a'_{ij} = a_{ji} \text{ pour } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p$$

Calculer la transposée de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si A et B sont des matrices que l'on peut additionner, montrer que

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

Si A et B sont des matrices que l'on peut multiplier, montrer que

$$(AB)^t = B^t A^t$$

5.2 Inversions de matrices

5.2.A Inverse d'une matrice

Soit n un entier et soit A une matrice carrée à n lignes et n colonnes. On dit que A est inversible si il existe une matrice A' à n lignes et n colonnes telle que

$$AA' = A'A = I$$

On dit alors que A' est l'inverse de A et on note $A^{-1} = A'$.

Exemple 5.2.1 La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice inversible d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Toutes les matrices ne sont pas inversibles. Par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas. On vérifie facilement qu'il ne peut exister de matrice A' telle que

$$AA' = I$$

Proposition 5.2.2 Soient A et B deux matrices de même taille inversible. Alors la matrice AB est aussi inversible et on a de plus :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

5.2. Inversions de matrices

Cette proposition se prouve aisément de la façon suivante. Si A et B sont inversibles, ceci signifie qu'il existe un inverse A^{-1} de A et un inverse B^{-1} de B . On remarque alors que

$$ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I$$

et que de même

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}B = I$$

Ceci signifie que AB est inversible et que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ce qu'il fallait démontrer.

Pour déterminer l'inverse d'une matrice A à n lignes et n colonnes, on peut toujours essayer de poser $A' = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ et de calculer le produit AA' . On sait alors que A' est l'inverse de A dans le cas où ce produit est l'identité. En identifiant les coefficients des deux matrices, il suit donc n^2 équations à n^2 inconnues.

Cette méthode n'est donc pas très efficace : pour $n = 2$, on obtient déjà 4 équations à 4 inconnues. Le cas $n = 4$ est déjà pratiquement irréalisable à la main avec 16 équations à 16 inconnues!!

La prochaine section nous fournit une méthode beaucoup plus efficace.

5.2.B Lien avec les systèmes linéaires

Soit n un entier et soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$. Pour déterminer si l'inverse de la matrice A existe et la calculer, on pose

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

On a alors

$$AX = Y \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

Ce système admet une solution unique pour tout B si et seulement A est inversible. De plus, dans ce cas, la matrice inverse est la matrice $B =$

5.2. Inversions de matrices

$(B_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ telle que

$$X = BY \iff \begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \dots + b_{1n}y_n \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \dots + b_{2n}y_n \\ \vdots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \dots + b_{nn}y_n \end{cases}$$

Ainsi, pour trouver l'inverse (si elle existe) d'une matrice, il suffit de résoudre un système linéaire.

Exemple 5.2.3 On cherche l'inverse (si elle existe) de la matrice à trois lignes et trois colonnes suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

On résout le système suivant :

$$AX = Y \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = y_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

Le système donne

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = y_1 \\ -x_2 - 3x_3 = y_2 - 2y_1 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

qui est sous forme semi-réduite. On obtient alors :

$$\begin{cases} x_1 = -y_1 + y_2 + 2y_3 \\ x_2 = 2y_1 - y_2 - 4y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

c'est à dire :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.2.C Exercices

Exercice 5.2.4 *Inverser, si possible, les matrices suivantes :*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.2.5 *Trouver les solutions des trois systèmes suivants*

$$\begin{cases} -3X_1 + 5X_2 + 6X_3 = 4 \\ -1X_1 + 2X_2 + 2X_3 = 5 \\ X_1 - X_2 - X_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3X_1 + 5X_2 + 6X_3 = 0 \\ -1X_1 + 2X_2 + 2X_3 = 1 \\ X_1 - X_2 - X_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3X_1 + 5X_2 + 6X_3 = 3 \\ -1X_1 + 2X_2 + 2X_3 = 3 \\ X_1 - X_2 - X_3 = 1 \end{cases}$$

Exercice 5.2.6 *Si A et B sont des matrices de même taille inversibles, la somme de A et de B est-elle nécessairement inversible ? si oui, démontrer, sinon, trouver un contre exemple.*