Histoire des nombres premiers

2$^{\text{ème}}$ partie : L'Hypothèse de Riemann

N. Jacon

Université de Franche-Comté

I. LA REVOLUTION DE RIEMANN

“L’hypothèse de Riemann est une proposition mathématique selon laquelle il est possible de décomposer les nombres premiers en musique.

"L'hypothèse de Riemann est une proposition mathématique selon laquelle il est possible de décomposer les nombres premiers en musique. Dire des nombres premiers qu'ils recèlent en eux une musique est une façon poétique de décrire ce théorème mathématique. Reste que la musique en question est franchement post-moderne". Michael Berry

A partir de la deuxième partie du XIXème, les efforts de nombre de mathématiciens se concentrent sur la conjecture de Gauss :

Le nombre $\pi(N)$ de nombres premiers entre 1 et N est proche de :

$$\mathrm{Li}(N) = \int_{j=2}^{N} \frac{du}{\ln(u)}$$

A partir de la deuxième partie du XIXème, les efforts de nombre de mathématiciens se concentrent sur la conjecture de Gauss :

Le nombre $\pi(N)$ de nombres premiers entre 1 et N est proche de :

$$\mathrm{Li}(N) = \int_{j=2}^{N} \frac{du}{\ln(u)}$$

En Allemagne, l'étude des mathématiques dans les Universités prend une part primordiale sous l'impulsion de Guillaume Von Humboldt (alors ministre de l'Education du royaume de Prusse, 1809).

"L'enseignement universitaire de permet pas seulement de comprendre l'unité de la science, il la facilite".

Le regard face aux mathématiques change : on les étudie pour elles-mêmes.

Voici un extrait d'une lettre de Carl Jacobi qui illustre bien ce propos :

"L'unique objet de la science est d'honorer l'esprit humain, et à cet égard un problème de la théorie des nombres a autant de valeur qu'un problème sur le système du monde"

Voici un extrait d'une lettre de Carl Jacobi qui illustre bien ce propos :

> "L'unique objet de la science est d'honorer l'esprit humain, et à cet égard un problème de la théorie des nombres a autant de valeur qu'un problème sur le système du monde"

C'est dans ce contexte qu'un des (rares) étudiants de Gauss, Riemann, va permettre une avancée décisive dans le problème de répartition des nombres premiers.

Bernhard Riemann est né le 17 septembre 1826 à Hanovre. Il se passionne vite pour les mathématiques, et avec l'autorisation de son père, il s'inscrit à la faculté de philosophie.

Bernhard Riemann est né le 17 septembre 1826 à Hanovre. Il se passionne vite pour les mathématiques, et avec l'autorisation de son père, il s'inscrit à la faculté de philosophie.

Il prépare donc à Göttingen sa Dissertation inaugurale (selon la terminologie allemande) sous la direction de Gauss.

Bernhard Riemann est né le 17 septembre 1826 à Hanovre. Il se passionne vite pour les mathématiques, et avec l'autorisation de son père, il s'inscrit à la faculté de philosophie.

Il prépare donc à Göttingen sa Dissertation inaugurale (selon la terminologie allemande) sous la direction de Gauss.

Il la soutient en 1851 : elle concerne principalement la théorie des fonctions d'une variable complexe, dont il s'intéresse particulièrement aux propriétés géométriques. Cette théorie étudie en particulier les fonctions entières, ie du type

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$$

où les a_i sont des nombres complexes.

Tout part de la fonction dite “fonction zéta” :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Tout part de la fonction dite “fonction zéta” :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

où s est un nombre réel supérieur strictement à 1. Cette fonction avait été utilisée par Dirichlet (qui succédait alors à Gauss à Göttingen) juste avant Riemann.

Tout part de la fonction dite “fonction zéta” :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

où s est un nombre réel supérieur strictement à 1. Cette fonction avait été utilisée par Dirichlet (qui succédait alors à Gauss à Göttingen) juste avant Riemann. Quel est le lien avec les nombres premiers ?

Tout part de la fonction dite "fonction zéta" :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

où s est un nombre réel supérieur strictement à 1. Cette fonction avait été utilisée par Dirichlet (qui succédait alors à Gauss à Göttingen) juste avant Riemann. Quel est le lien avec les nombres premiers ?

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - 1/p^s}$$

Cette identité était en fait déjà connue d'Euler mais ceci donne une idée de l'implication qu'elle peut avoir sur le comportement des nombres premiers.

Il est possible de "prolonger" cette fonction sur l'ensemble des nombres réels positifs (différents de 1) en posant.

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

Il est possible de “prolonger” cette fonction sur l’ensemble des nombres réels positifs (différents de 1) en posant.

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

On peut ensuite prolonger cette fonction sur l’ensemble des nombres complexes (de partie réelle différente de 1). Riemann s’intéressera aux “zéros” de cette fonction, c’est à dire aux nombres complexes $z = x + iy$ tels que $\zeta(z) = 0$.

Il est possible de "prolonger" cette fonction sur l'ensemble des nombres réels positifs (différents de 1) en posant.

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

On peut ensuite prolonger cette fonction sur l'ensemble des nombres complexes (de partie réelle différente de 1). Riemann s'intéressera aux "zéros" de cette fonction, c'est à dire aux nombres complexes $z = x + iy$ tels que $\zeta(z) = 0$.

Donnons une idée du lien avec les nombres premiers : La fonction ζ a des zéros aux points entiers négatifs pairs $z = -2, -4, \ldots$, on les appelle les zéros triviaux. Mais cette fonction possède d'autres zéros appelés zéros non triviaux. En termes simples, mieux on connaît l'emplacement de ces zeros, mieux on connaît la fonction de repartitions des nombres premiers.

Il est possible de “prolonger” cette fonction sur l’ensemble des nombres réels positifs (différents de 1) en posant.

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

On peut ensuite prolonger cette fonction sur l’ensemble des nombres complexes (de partie réelle différente de 1). Riemann s’intéressera aux “zéros” de cette fonction, c’est à dire aux nombres complexes $z = x + iy$ tels que $\zeta(z) = 0$.

Donnons une idée du lien avec les nombres premiers : La fonction ζ a des zéros aux points entiers négatifs pairs $z = -2, -4, \ldots$, on les appelle les zéros triviaux. Mais cette fonction possède d’autres zéros appelés zéros non triviaux. En termes simples, mieux on connaît l’emplacement de ces zeros, mieux on connaît la fonction de repartitions des nombres premiers.

Par exemple, l'essentiel de la démonstration de Vallée Poussin et Hadamard ("$\Pi(N)$ est proche de $N/\ln(N)$") est de montrer que ces zeros ne sont jamais situés sur la droite $x = 1$.

Par exemple, l'essentiel de la démonstration de Vallée Poussin et Hadamard ("$\Pi(N)$ est proche de $N/\ln(N)$") est de montrer que ces zeros ne sont jamais situés sur la droite $x = 1$.
Voici un dessin montrant la répartition de quelques zéros non triviaux.

Conjecture (Hypothèse de Riemann)

Les zéros non triviaux de la fonction zeta sont tous situés sur la droite $x = 1/2$.

Conjecture (Hypothèse de Riemann)

Les zéros non triviaux de la fonction zeta sont tous situés sur la droite $x = 1/2$.

Si cette hypothèse est vrai, ceci montre en particulier l'encadrement :

$$|\pi(N) - \mathrm{Li}(N)| \leqslant C\sqrt{N}\ln(N)$$

d'après H. Von Kock.

En quoi cette hypothèse est-elle intéressante ?

- Elle est liée à d'autres questions importantes par exemple une de ses formes généralisées entraineraît l'existence d'un algorithme polynomiale pour tester la primalité d'un nombre. Beaucoup de problèmes en théorie des nombres sont liés à cette hypothèse.

- Elle est liée à d'autres questions importantes par exemple une de ses formes généralisées entraineraît l'existence d'un algorithme polynomiale pour tester la primalité d'un nombre. Beaucoup de problèmes en théorie des nombres sont liés à cette hypothèse.
- C'est une sorte de défi pour chaque génération de mathématicien (cf théorème de Wiles-Fermat).

- Elle est liée à d'autres questions importantes par exemple une de ses formes généralisées entraineraît l'existence d'un algorithme polynomiale pour tester la primalité d'un nombre. Beaucoup de problèmes en théorie des nombres sont liés à cette hypothèse.
- C'est une sorte de défi pour chaque génération de mathématicien (cf théorème de Wiles-Fermat).
- Elle induit l'invention de nouveaux concepts en mathématiques (cf théorème de Wiles-Fermat encore).

- Elle est liée à d'autres questions importantes par exemple une de ses formes généralisées entraineraît l'existence d'un algorithme polynomiale pour tester la primalité d'un nombre. Beaucoup de problèmes en théorie des nombres sont liés à cette hypothèse.
- C'est une sorte de défi pour chaque génération de mathématicien (cf théorème de Wiles-Fermat).
- Elle induit l'invention de nouveaux concepts en mathématiques (cf théorème de Wiles-Fermat encore). D'après Hilbert, la plus grande réussite technologique serait d'attraper une mouche sur la lune "parce que pour parvenir à ce résultat, il faudrait résoudre des problèmes auxiliaires tels que cela signifierait que nous aurions trouvé la solutions à presque tous les problèmes matérielles de l'humanité".

Ses travaux sont pubilés dans un petit article d'une dizaine de pages et c'est pratiquement la seule contribution de Riemann à la théorie des nombres.

Ses travaux sont pubilés dans un petit article d'une dizaine de pages et c'est pratiquement la seule contribution de Riemann à la théorie des nombres.

Il est bien sûr connu notamment pour avoir ouvert la voie aux géométries non-euclidiennes et à la théorie de la relativité générale.

Ses travaux sont pubilés dans un petit article d'une dizaine de pages et c'est pratiquement la seule contribution de Riemann à la théorie des nombres.

Il est bien sûr connu notamment pour avoir ouvert la voie aux géométries non-euclidiennes et à la théorie de la relativité générale.

On lui doit également d'important travaux sur les intégrales, poursuivant ceux de Cauchy, qui ont donné entre autres ce qu'on appelle aujourd'hui les intégrales de Riemann.

Dans les années qui suivent l'énoncé de cette conjecture, de nombreux mathématiciens de renoms se sont acharnés à la prouver .... sans résultat. Ce problème deviendra même un des fameux 23 problèmes de Hilbert.

Certains Mathématiciens commencèrent alors à supposer la véracité de cette conjecture pour avancer dans leur recherche ....

Dans les années qui suivent l'énoncé de cette conjecture, de nombreux mathématiciens de renoms se sont acharnés à la prouver .... sans résultat. Ce problème deviendra même un des fameux 23 problèmes de Hilbert.

Certains Mathématiciens commencèrent alors à supposer la véracité de cette conjecture pour avancer dans leur recherche ....
.... en risquant le fait que la découverte d'un zéro en dehors de la droite détruise tout l'édifice.

Quand on fait des calculs numériques de $\mathrm{Li}(N)$, il semble que l'on ait l'inégalité suivante :

$$\Pi(N) \leqslant \mathrm{Li}(N)$$

Quand on fait des calculs numériques de $\mathrm{Li}(N)$, il semble que l'on ait l'inégalité suivante :

$$\Pi(N) \leqslant \mathrm{Li}(N)$$

Pourtant un mathématicien britannique Littelwood a montré que $\Pi(N) - \mathrm{Li}(N)$ changeait de signe une infinité de fois !

Quand on fait des calculs numériques de $\mathrm{Li}(N)$, il semble que l'on ait l'inégalité suivante :

$$\Pi(N) \leqslant \mathrm{Li}(N)$$

Pourtant un mathématicien britannique Littelwood a montré que $\Pi(N) - \mathrm{Li}(N)$ changeait de signe une infinité de fois !

L'assertion "$\Pi(N) \leqslant \mathrm{Li}(N)$ pour tout entier N" est donc fausse (on sait que le premier contre exemple N à cette conjecture est majoré par 10^{371} et tous les entiers inférieurs à 10^{20} vérifient l'inégalité !!!).

Un autre résultat de Littelwood : on a dit que l'hypothèse de Riemann implique

$$|\pi(N) - \mathrm{Li}(N)| \leqslant C\sqrt{N}\ln(N)$$

Peut-être que cet encadrement est grossier ?

Un autre résultat de Littelwood : on a dit que l'hypothèse de Riemann implique

$$|\pi(N) - \mathrm{Li}(N)| \leqslant C\sqrt{N}\ln(N)$$

Peut-être que cet encadrement est grossier ?

En fait Littelwood va montrer

$$|\pi(N) - \mathrm{Li}(N)| > c\sqrt{N}\frac{\ln(\ln(\ln(N)))}{\ln(N)}$$

Un autre résultat de Littelwood : on a dit que l'hypothèse de Riemann implique

$$|\pi(N) - \mathrm{Li}(N)| \leqslant C\sqrt{N}\ln(N)$$

Peut-être que cet encadrement est grossier ?

En fait Littelwood va montrer

$$|\pi(N) - \mathrm{Li}(N)| > c\sqrt{N}\frac{\ln(\ln(\ln(N)))}{\ln(N)}$$

Ce qui montre que l'encadrement ci-dessus est plutôt un "bon encadrement".

Des universitaires comme Littelwood, Hardy, Landau au début du siècle ont permis des avancées significatives en théorie des nombres. Une personne inattendue va énormément apporter à ce domaine.

II. RAMANUJAN

Ramanujan est né à Erode en Inde, dans une famille pauvre de confession brâhmane orthodoxe.

Complètement autodidacte, toutes les mathématiques qu'il a apprises lui viennent des deux uniques livres qu'il s'était procurés avant ses 15 ans : "La Trigonométrie plane" de S. Looney, et "Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics" de S. Carr.

Ramanujan est né à Erode en Inde, dans une famille pauvre de confession brâhmane orthodoxe.

Complètement autodidacte, toutes les mathématiques qu'il a apprises lui viennent des deux uniques livres qu'il s'était procurés avant ses 15 ans : "La Trigonométrie plane" de S. Looney, et "Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics" de S. Carr.

Ces deux livres contenaient une liste de plus de 4000 théorèmes ....

Ramanujan est né à Erode en Inde, dans une famille pauvre de confession brâhmane orthodoxe.

Complètement autodidacte, toutes les mathématiques qu'il a apprises lui viennent des deux uniques livres qu'il s'était procurés avant ses 15 ans : "La Trigonométrie plane" de S. Looney, et "Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics" de S. Carr.

Ces deux livres contenaient une liste de plus de 4000 théorèmes .... sans démonstration.

Il a apporté une grande contribution à :

- la théorie des nombres,
- les fonctions elliptiques,

Il a apporté une grande contribution à :

- la théorie des nombres,
- les fonctions elliptiques,
- les fractions continues
- les séries infinies,

Il a apporté une grande contribution à :

- la théorie des nombres,
- les fonctions elliptiques,
- les fractions continues
- les séries infinies,

Mathématicien complètement marginal, il a développé ses propres mathématiques grâce à une intuition incroyable.

Littlewood : “L’idée claire et nette de ce qu’implique une démonstration lui échappait totalement. Si, en mélangeant preuve et intuition, il parvenait à une certitude, il n’allait pas plus loin”.

Littlewood : “L’idée claire et nette de ce qu’implique une démonstration lui échappait totalement. Si, en mélangeant preuve et intuition, il parvenait à une certitude, il n’allait pas plus loin”.

Dans une lettre envoyée a Hardy, Ramanujan écrit avoir trouvé une fonction qui représente exactement le nombre de nombre premiers”. Cette lettre contient des affirmations farfelues comme :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots = -\frac{1}{12}$$

Littlewood : “L’idée claire et nette de ce qu’implique une démonstration lui échappait totalement. Si, en mélangeant preuve et intuition, il parvenait à une certitude, il n’allait pas plus loin”.

Dans une lettre envoyée a Hardy, Ramanujan écrit avoir trouvé une fonction qui représente exactement le nombre de nombre premiers”.
Cette lettre contient des affirmations farfelues comme :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots = -\frac{1}{12}$$

Après un (gros) travail de déchiffrage, Hardy se rend compte que cette formule non académique donne la valeur de la fonction zéta au point -1 !
Hardy rédige alors la lettre suivante.

“J’ai été extrêmement intéressé par votre lettre et par les théorèmes que vous énoncez. Vous comprendrez cependant que, avant que je puisse juger convenablement de la valeur de ce que vous avez fait, il est essentiel que je puisse voir les preuves de certaines de vos affirmations. Il me semble que l’on peut classer vos résultats en trois catégories :

- il y a un certain nombre de résultats qui sont déjà connus, ou aisément déductibles de théorèmes connus;
- il y a des résultats qui, autant que je le sache, sont nouveaux et intéressants, mais intéressants plus par leur étrangeté et par leur apparente difficulté que par leur importance ;
- il y a des résultats qui semblent nouveaux et importants”

Malgré quelques erreurs dans ses affirmations, Hardy et Littlewood ont trouvé un génie et l'invite à Cambridge. Il y restera 5 ans (1914-1919) mais ne se fera jamais à la vie occidentale.

Malgré quelques erreurs dans ses affirmations, Hardy et Littlewood ont trouvé un génie et l'invite à Cambridge. Il y restera 5 ans (1914-1919) mais ne se fera jamais à la vie occidentale.

Il retourne en Inde et meurt en 1920 à l'age de 32 ans.

Malgré quelques erreurs dans ses affirmations, Hardy et Littlewood ont trouvé un génie et l'invite à Cambridge. Il y restera 5 ans (1914-1919) mais ne se fera jamais à la vie occidentale.

Il retourne en Inde et meurt en 1920 à l'age de 32 ans.

Si ce sont les nombres premiers qui ont permis de le détecter, il s'est principalement illustré par la résolution d'autres problèmes :

- Il avait redécouvert les résultats de Gauss et d'autres sur les séries hypergéométriques.

- Il avait redécouvert les résultats de Gauss et d'autres sur les séries hypergéométriques.
- Ses propres travaux sur les produits et les sommes partielles de ces séries ont conduit à des développements importants dans ce domaine.

- Il avait redécouvert les résultats de Gauss et d'autres sur les séries hypergéométriques.
- Ses propres travaux sur les produits et les sommes partielles de ces séries ont conduit à des développements importants dans ce domaine.
- Son travail le plus célèbre concerne le nombre $p(n)$ de partitions d'un entier n. Dans un papier publié avec Hardy, il donne une formule *asymptotique* pour $p(n)$. Elle donne en fait la valeur exacte de $p(n)$, ce qui fut démontré plus tard par Rademacher.

Ramanujan a laissé derrière lui un grand nombre de cahiers non-publiés : les fameux "carnets de Ramanujan ", remplis de théorèmes que les mathématiciens ont continué, et continuent, d'étudier.

Un exemple de formule donnée en 1910 :

$$\pi = \frac{9801}{2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{1103 + 26390n}{396^{4n}}}$$

Ramanujan a laissé derrière lui un grand nombre de cahiers non-publiés : les fameux "carnets de Ramanujan ", remplis de théorèmes que les mathématiciens ont continué, et continuent, d'étudier.

Un exemple de formule donnée en 1910 :

$$\pi = \frac{9801}{2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{1103 + 26390n}{396^{4n}}}$$

démontré en 1985.

III. DE GOTTINGEN A PRINCETON

Devant l'incapacité de prouver la conjecture de Riemann, certains mathématiciens commençaient à ne plus y croire réellement :

Devant l'incapacité de prouver la conjecture de Riemann, certains mathématiciens commençaient à ne plus y croire réellement :

Littlewood : "Je crois que c'est faux. Il n'en existe aucune preuve. Or il ne faut pas accorder de crédit à ce qui n'a pas de preuve. Je dois par ailleurs reconnaître que je ne vois aucune raison imaginable venant à l'appui de sa véracité".

L'une des contributions de Hardy et Littlewood à la conjecture de Riemann est qu'ils avaient trouvé une méthode assez performante pour calculer l'emplacement des zéros de la fonction zéta.

Devant l'incapacité de prouver la conjecture de Riemann, certains mathématiciens commençaient à ne plus y croire réellement :

Littlewood : "Je crois que c'est faux. Il n'en existe aucune preuve. Or il ne faut pas accorder de crédit à ce qui n'a pas de preuve. Je dois par ailleurs reconnaître que je ne vois aucune raison imaginable venant à l'appui de sa véracité".

L'une des contributions de Hardy et Littlewood à la conjecture de Riemann est qu'ils avaient trouvé une méthode assez performante pour calculer l'emplacement des zéros de la fonction zéta.

A la fin des années 1920, les mathématiciens avaient repéré 138 zéros non triviaux tous confirmant l'hypothèse de Riemann.

A la fin des années 1920, les mathématiciens avaient repéré 138 zéros non triviaux tous confirmant l'hypothèse de Riemann.

En étudiant les oeuvres posthumes de Riemann, un jeune mathématicien de Göttingen (puis de Francfort), Siegel, va permettre des progrès remarquables sur l'hypothèse de Riemann. Siegel se rend compte qu'afin de calculer ses zéros, Riemann s'est servi :

- d'une formule identifiée par Hardy et Littlewood 60 ans plus tard (!)

A la fin des années 1920, les mathématiciens avaient repéré 138 zéros non triviaux tous confirmant l'hypothèse de Riemann.

En étudiant les oeuvres posthumes de Riemann, un jeune mathématicien de Göttingen (puis de Francfort), Siegel, va permettre des progrès remarquables sur l'hypothèse de Riemann. Siegel se rend compte qu'afin de calculer ses zéros, Riemann s'est servi :

- d'une formule identifiée par Hardy et Littlewood 60 ans plus tard (!)
- d'une autre formule complètement nouvelle !

A la fin des années 1920, les mathématiciens avaient repéré 138 zéros non triviaux tous confirmant l'hypothèse de Riemann.

En étudiant les oeuvres posthumes de Riemann, un jeune mathématicien de Göttingen (puis de Francfort), Siegel, va permettre des progrès remarquables sur l'hypothèse de Riemann. Siegel se rend compte qu'afin de calculer ses zéros, Riemann s'est servi :

- d'une formule identifiée par Hardy et Littlewood 60 ans plus tard (!)
- d'une autre formule complètement nouvelle !

Grâce à celle-ci les 1041 premiers zéros seront calculés .... vérifiant l'hypothèse.

Conjecture (Postulat de Bertrand 1822-1900)

Pour tout $n \geqslant 2$*, il existe un nombre premier* p *tel que* $n < p < 2n$ *?*

Conjecture (Postulat de Bertrand 1822-1900)

Pour tout $n \geqslant 2$, il existe un nombre premier p tel que $n < p < 2n$?

C'est Chebyshev en 1854 qui proposa la première démonstration. Ramanujan en donna une autre et dans les années 40, Paul Erdös obtient plus tard un raffinement de ce postulat.

Conjecture (Postulat de Bertrand 1822-1900)

Pour tout $n \geqslant 2$, il existe un nombre premier p tel que $n < p < 2n$?

C'est Chebyshev en 1854 qui proposa la première démonstration. Ramanujan en donna une autre et dans les années 40, Paul Erdös obtient plus tard un raffinement de ce postulat.
Un mathématicien bien différent Selberg (en collaboration avec Erdös ?) parvient ensuite à établir une preuve élégante du théorème des nombres premiers. Selberg publie seul le document, et obtient la médaille Fields (grâce a ces travaux sur les nombres premiers)

Deuxième problème de Hilbert : Démontrer la consistance des axiomes de l'arithmétique.

Deuxième problème de Hilbert : Démontrer la consistance des axiomes de l'arithmétique.
C'est à dire :

"Sommes-nous certains que l'on ne puisse pas démontrer qu'une affirmation est vrai et fausse ?"

Deuxième problème de Hilbert : Démontrer la consistance des axiomes de l'arithmétique.
C'est à dire :

"Sommes-nous certains que l'on ne puisse pas démontrer qu'une affirmation est vrai et fausse ?"

La question méritait d'être posée d'autant que des personnes semblaient arriver à des paradoxes (finalement résolus) comme le paradoxe de Russel obtenu en considérant l'ensemble

$$y = \{x | x \notin x\}$$

Dans sa thèse, Gödel ("Herr Warum") montre que quelque soit les axiomes choisis, ils ne pourraient jamais servir à prouver qu'aucune contradiction ne ferait jour.

Dans sa thèse, Gödel ("Herr Warum") montre que quelque soit les axiomes choisis, ils ne pourraient jamais servir à prouver qu'aucune contradiction ne ferait jour.
Ce résultat génère un véritable choc dans la communauté mathématique, André Weil résuma la situation par :

Dans sa thèse, Gödel ("Herr Warum") montre que quelque soit les axiomes choisis, ils ne pourraient jamais servir à prouver qu'aucune contradiction ne ferait jour.
Ce résultat génère un véritable choc dans la communauté mathématique, André Weil résuma la situation par :

"Dieu existe puisque l'univers mathématiques est consistant, et le diable existe puisque l'on ne peut pas le prouver"

Dans sa thèse, Gödel ("Herr Warum") montre que quelque soit les axiomes choisis, ils ne pourraient jamais servir à prouver qu'aucune contradiction ne ferait jour.
Ce résultat génère un véritable choc dans la communauté mathématique, André Weil résuma la situation par :

> "Dieu existe puisque l'univers mathématiques est consistant, et le diable existe puisque l'on ne peut pas le prouver"

Le deuxième résultat de Gödel est encore plus déstablilisant : tout système d'axiomes consistants est nécessairement incomplet dans la mesure où il y aura des énoncés qui ne pourront ni être démontrés ni réfutés grâce aux axiomes.

En fait, il démontre que si on construit un système logique pour formaliser la théorie des nombres entiers, ce système contiendra au moins une formule A qui est telle que ni A, ni sa négation non-A ne pourront être formellement démontrées dans le cadre du système.

En fait, il démontre que si on construit un système logique pour formaliser la théorie des nombres entiers, ce système contiendra au moins une formule A qui est telle que ni A, ni sa négation non-A ne pourront être formellement démontrées dans le cadre du système.

Conséquence :

En fait, il démontre que si on construit un système logique pour formaliser la théorie des nombres entiers, ce système contiendra au moins une formule A qui est telle que ni A, ni sa négation non-A ne pourront être formellement démontrées dans le cadre du système.

Conséquence : peut-etre que l'hypothèse de Riemann ne peut pas être démontrée ?!!!

En fait, il démontre que si on construit un système logique pour formaliser la théorie des nombres entiers, ce système contiendra au moins une formule A qui est telle que ni A, ni sa négation non-A ne pourront être formellement démontrées dans le cadre du système.

Conséquence : peut-etre que l'hypothèse de Riemann ne peut pas être démontrée ?!!!

En fait, le théorème d'incomplétude de Gödel montre surtout que les mathématiques se doivent de faire évoluer ses fondations : ses axiomes de façon à faire évoluer cette science en elle-même.

En fait, il démontre que si on construit un système logique pour formaliser la théorie des nombres entiers, ce système contiendra au moins une formule A qui est telle que ni A, ni sa négation non-A ne pourront être formellement démontrées dans le cadre du système.

Conséquence : peut-etre que l'hypothèse de Riemann ne peut pas être démontrée ?!!!

En fait, le théorème d'incomplétude de Gödel montre surtout que les mathématiques se doivent de faire évoluer ses fondations : ses axiomes de façon à faire évoluer cette science en elle-même.

A partir de la deuxième guerre mondiale, rentre en scène un outil qui va révolutionner le monde des nombres premiers : l'ordinateur avec Alan Turing.

En 1971, grâce à la théorie de Turing (et de Robinson, Matiyassevitch) , Jones, Sato, Wada et Wiens donnèrent une formule permettant de déterminer tous les nombres premiers (!!!)

En 1971, grâce à la théorie de Turing (et de Robinson, Matiyassevitch) , Jones, Sato, Wada et Wiens donnèrent une formule permettant de déterminer tous les nombres premiers (!!!)

$$(k+2)[1-(wz+h+j-q)^2-(2n+p+q+z-e)^2$$
$$-(a^2y^2-y^2+1-x^2)^2-(e^3(e+2)(a+1)^2+1-o^2)^2$$
$$-(16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2+1-f^2)^2$$
$$-(((a+u^2(u^2-a))^2-1)(n+4dy)^2+1-(x+cu)^2)^2-(ai+k+1-l-i)$$
$$-((gk+2g+k+1)(h+j)+h-z)^2-(16r^2y^4(a^2-1)+1-u^2)^2$$
$$-(p-m+l(a-n-1)+b(2an+2a-n^2-2n-2))^2$$
$$-(z-pm+pla-p^2l+t(2ap-p^2-1))^2$$
$$-(q-x+y(a-p-1)+s(2ap+2a-p^2-2p-2))^2$$
$$-(a^2l^2-l^2+1-m^2)^2-(n+l+v-y)^2]$$

Pour trouver un nombre premier, on remplace tout simplement les variables par des nombres entiers. Si le nombre obtenu est positif alors il est premier. On obtient ts les nombres premiers pour un choix de variables.

Quant on apprit l'existence d'une telle formule à Linnik, il dit

"C'est merveilleux. Il est fort probable que l'on apprenne bientôt beaucoup plus sur les nombres premiers"

Pour trouver un nombre premier, on remplace tout simplement les variables par des nombres entiers. Si le nombre obtenu est positif alors il est premier. On obtient ts les nombres premiers pour un choix de variables.

Quant on apprit l'existence d'une telle formule à Linnik, il dit

"C'est merveilleux. Il est fort probable que l'on apprenne bientôt beaucoup plus sur les nombres premiers"

Or, des résultats de Robinson et Matiyassevitch montrent qu'une formule de ce type peut être trouvé pour n'importe quelle suite de nombres entiers ... d'où la perte d'intérêt de cet formule. Quant il apprit ceci, Linnik :

"C'est désolant. Il est fort probable que l'on apprenne rien de nouveau sur les nombres premiers"

Grâce au développement des ordinateurs, on a pu tester plus facilement l'hypothèse de Riemann, en 1975, Brent annonça que les 75 premiers millions de zéros se trouvent bien sur la bonne droite conjecturée par Riemann .... un peu plus tard, on arriva à 300 millions ....

Grâce au développement des ordinateurs, on a pu tester plus facilement l'hypothèse de Riemann, en 1975, Brent annonça que les 75 premiers millions de zéros se trouvent bien sur la bonne droite conjecturée par Riemann .... un peu plus tard, on arriva à 300 millions ....

Ces calculs ne permettent pas seulement une vérification, dans les années 80, elles ont permis de démontrer la fausseté d'un proche parent de la conjecture de Riemann : la conjecture de Mertens. Le contre-exemple est l'oeuvre d'une ... compagnie de téléphone $AT.T$

C'est à partir de ce moment que l'on va s'apercevoir de "l'utilité" de la théorie des nombres dans la vie de tous les jours et en particulier en cryptographie.

Les grands compagnies privés (banques, assurances etc ...) se sont alors mis à s'interesser aux problemes liés aux nombres premiers (voir le prochain cours).

C'est à partir de ce moment que l'on va s'apercevoir de "l'utilité" de la théorie des nombres dans la vie de tous les jours et en particulier en cryptographie.

Les grands compagnies privés (banques, assurances etc ...) se sont alors mis à s'interesser aux problemes liés aux nombres premiers (voir le prochain cours).

Depuis quelques années, on cherche par exemple à déterminer de grands nombres premiers, la EFF (Electronic Frontier Foundation), association de défense et de promotion de l'utilisation du réseau Internet, offre de belles récompenses :

C'est à partir de ce moment que l'on va s'apercevoir de "l'utilité" de la théorie des nombres dans la vie de tous les jours et en particulier en cryptographie.

Les grands compagnies privés (banques, assurances etc ...) se sont alors mis à s'interesser aux problemes liés aux nombres premiers (voir le prochain cours).

Depuis quelques années, on cherche par exemple à déterminer de grands nombres premiers, la EFF (Electronic Frontier Foundation), association de défense et de promotion de l'utilisation du réseau Internet, offre de belles récompenses :

- 100000 pour un nombre premier de 10 millions de chiffres (on y est presque

C'est à partir de ce moment que l'on va s'apercevoir de "l'utilité" de la théorie des nombres dans la vie de tous les jours et en particulier en cryptographie.

Les grands compagnies privés (banques, assurances etc ...) se sont alors mis à s'interesser aux problemes liés aux nombres premiers (voir le prochain cours).

Depuis quelques années, on cherche par exemple à déterminer de grands nombres premiers, la EFF (Electronic Frontier Foundation), association de défense et de promotion de l'utilisation du réseau Internet, offre de belles récompenses :

- 100000 pour un nombre premier de 10 millions de chiffres (on y est presque enfin pas moi !),
- 150000 pour 100 millions de chiffres,
- 250000 pour un milliard de chiffres.

D'apres Peter Sarnak : "Si Gauss vivait de nos jours, il serait pirate informatique"

D'apres Peter Sarnak : "Si Gauss vivait de nos jours, il serait pirate informatique"

Enrico Bombieri "L'hypothèse de Riemann n'est pas seulement un problème. C'est le plus important problème en mathématiques pures. Il est l'indication qu'il y a quelque chose d'extrêmement profond et fondamental que nous n'arrivons pas à saisir".