GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

par

Nicolas Jacon

1. Introduction

La géométrie projective peut être vue comme une complétion de la géométrie affine. L'idée est ici de modéliser les notions de perspectives et d'horizon. Cette branche très ancienne des mathématiques est reliée aux problèmes de représentations graphiques (et donc à des problèmes informatiques !) et elle permet de simplifier des théorèmes importants de géométrie.

On peut penser à un plan projectif comme à un plan affine classique auquel on a ajouté une "droite à l'infini", chaque parallèle se coupant sur cette droite. En géométrie projective, cette notion de parallélisme disparaît donc (ce qui a pour conséquance de simplifier les énoncés). L'un des grands avantages de la géométrie projective est que la plupart de ses énoncés se traduisent facilement en langage d'algèbre linéaire ... la difficulté sera principalement de faire cette traduction.

Ce chapitre sera organisé de la façon suivante : dans la première partie, nous introduisons les notions de base de la géométrie projective : espaces projectifs, sous-espaces projectifs, carte affine etc ... nous nous intéressons ensuite à certaines applications naturelles entre espaces projectifs : les homographies et introduisons quelques outils intéressants comme le birapport. Nous étudions ensuite plus précisément ces applications, en particulier lorsque l'on travaille sur la droite projective complexe. La dernière partie est enfin consacrée aux coniques d'un point de vue projectif.

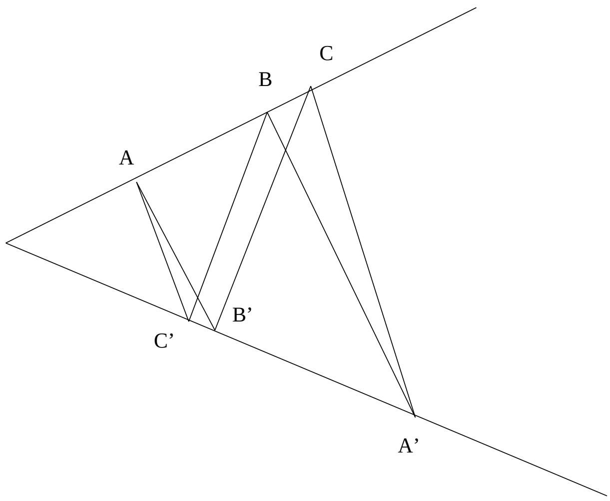
Quelques remarques bibliographiques : tout ce polycopié est hautement inspiré de la partie projective du livre de Michèle Audin [**1**] (on pourra aussi l'utiliser pour des rappels sur la géométrie affine, euclidienne, sur les formes quadratiques, les coniques etc ...). Pour plus de détails sur la géométrie projective, voir J-C. Sidler [**5**] (très complet) et dans un soucis peut-être plus didactique l'excellent polycopié de R. Rolland [**3**]. Le livre de Samuel [**4**] est aussi un classique.

2. Espaces projectifs

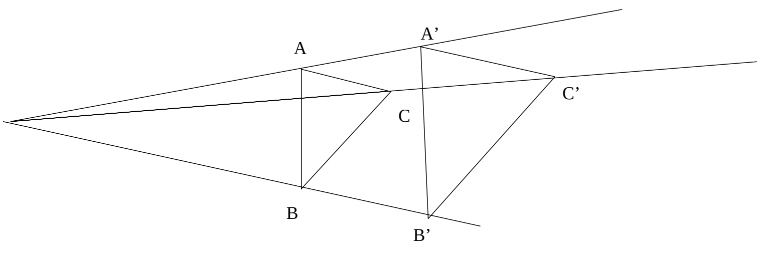
2.1. Deux théorèmes de Géométrie. — Dans cette partie, on commence par rappeller deux théorèmes classiques et fondamentales en géométrie.

Théorème 2.1 **(de Pappus)**. — *Soient deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ dans un plan affine. Soient A, B, C trois points de $\mathcal{D}$ et soient A', B' et C' trois points de $\mathcal{D}'$. Si AB' est parallèle à BA' et BC' est parallèle à $B'C$, alors AC' est parallèle à $A'C$.*

Pour la démonstration du théorème, on considère deux cas disctincts :
- Le cas où $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ est un point O. On démontre alors le théorème en utilisant des homothéties de centre O.
- Le cas où $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ est vide c'est à dire lorsque les deux droites sont parallèles. On utilise alors des translations.



Théorème 2.2 **(de Desargues)**. — *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles sans points communs dont les cotés sont parallèles. Alors, les droites AA', BB' et CC' sont concourrantes ou parallèles.*



Pour la démonstration de ce théorème, là encore, deux cas sont à étudier :

– Le cas où $AA' \cap BB'$ est un point O. On démontre alors le théorème en utilisant des homothéties de centre O.
– Le cas où $AA' \cap BB'$ est vide c'est à dire lorsque les deux droites sont parallèles. On utilise alors des translations.

On va maintenant travailler dans un espace où le cas des droites parallèles n'est plus un cas exceptionnel. Pour ceci, on va ajouter des points "à l'infini" afin que les parallèles se rencontrent en ces points.

2.2. Définition. — Soit $\mathbb{K}$ un corps et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui sera toujours de dimension finie. On définit la relation (binaire) de colinéarité dans l'espace $E \setminus \{0\}$ de la façon suivante : si $(u, v) \in (E \setminus \{0\})^2$ alors :

$$u \sim v \iff u = \lambda v \text{ pour } \lambda \in \mathbb{K}.$$

On vérifie facilement que c'est une relation d'équivalence.

Definition 2.3. — L'ensemble des classes d'équivalence sous la relation $\sim$ est appelé *l'espace projectif* de E et on le note $P(E)$.

L'espace projectif est donc l'ensemble des droites vectorielles de E (c'est à dire l'ensemble des sous-espaces de dimension 1 de E). Un élément de $P(E)$ est appelé un point. Par convention, si E est de dimension n, on dit que la dimension de $P(E)$ est $n-1$.

– Si $\dim(E) = 2$, $P(E)$ s'appelle une droite projective.
– si $\dim(E) = 3$, $P(E)$ s'appelle un plan projectif

Si $E = \mathbb{K}^{n+1}$, on note $P_n(\mathbb{K}) = P(\mathbb{K}^{n+1})$ (ou plus simplement P_n) l'espace projectif de E de dimension n. Comme tout espace vectoriel de dimension $n+1$ est isomorphe à $\mathbb{K}^{n+1}$, on pourra se ramener à ce cas la plupart du temps.

Exemple 2.4. — Pour $n = 1$, l'espace projectif $P_1(\mathbb{K})$ est l'ensemble :

$$\{(1, 0)\} \cup \{(x, 1) \mid x \in \mathbb{K}^*\}$$

Le point $(1, 0)$ (qui correspond donc à un droite vectorielle) peut être vu comme un point ... à l'infini.

Remarque 2.5. — On ne parlera pas ici de topologie. Néanmoins si le corps sur lequel est défini E est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'espace vectoriel E est muni d'une topologie naturelle. On fait ainsi de $P(E)$ un espace topologique en récupérant la topologie quotient faite pour que la projection $\pi_E : E \setminus \{0\} \to P(E)$ soit continue. On peut alors montrer que cet espace projectif est compact et connexe par arcs (c'est l'image d'un compact : la sphère unité de E par une application continue qui est la projection, l'espace est de plus séparé donc il est compact, enfin la sphère est connexe par arcs si on est en dimension supérieur à 2 et le cas de la dimension 1 est direct cf [**1**, Prop. 1.1 p.134])

Avant d'étudier les représentations des éléments de ces espaces, nous allons nous intéresser à une propriété fondamentale : le théorème d'incidence qui justifie les assertions de l'introduction.

2.3. Sous-espace projectif. — Nous allons tout d'abord définir la notion de sous-espace projectif.

Definition 2.6. — Une partie V de $P(E)$ est appelée *un sous-espace projectif* si il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que $V = P(F)$.

On voit ainsi que si $E \subset F$ alors $P(E) \subset P(F)$. On note aussi que l'on a une bijection entre l'ensemble des sous-espaces vectoriel de dimension $k+1$ de E et l'ensemble des sous-espaces projectifs de dimension k de $P(E)$.

Si $P(F)$ et $P(G)$ sont des sous-espaces projectifs de l'espace projectif $P(E)$, on vérifie immédiatement que l'intersection $P(F) \cap P(G)$ est un sous-espace projectif correspondant au sous-espace vectoriel $F \cap G$. On a donc $P(F) \cap P(G) = P(F \cap G)$.

Pour tout couple de sous-espaces projectifs de dimensions finies on a la relation fondamentale :

$$\dim P(F) + \dim P(G) = \dim P(F+G) + \dim P(F \cap G).$$

Le théorème ci-dessous est alors évident (en remarquant bien que $\dim P(E) = 0$ implique que $P(E) \neq 0$!).

***Théorème 2.7* (d'incidence).** — *Soit F et G deux sous-espaces vectoriel d'un espace vectoriel E vérifiant :*

$$\dim(P(F)) + \dim(P(G)) \geq \dim(P(E)).$$

Alors on a :

$$P(F) \cap P(G) \neq \emptyset.$$

Ainsi, par exemple, deux droites d'un plan se coupent toujours.

Signalons également le résultat suivant :

Proposition 2.8. — *Soit H un hyperplan projectif (c'est à dire $H = P(V)$ avec V un hyperplan vectoriel). Soit m un point hors de H. Alors toute droite (projective) passant par m coupe H en un point et un seul.*

Démonstration. — Il suffit de traduire les données en termes d'espaces vectoriel : On a $H = P(V)$ avec $\dim(V) = n-1$ où $n = \dim(E)$. Soit $d = P(D)$ une droite projective, c'est à dire $\dim(D) = 2$ (ie D est un plan vectoriel). Comme m n'est pas dans H, D n'est pas contenu dans V. On a donc :

$$\dim(D \cap H) = \dim(D) + \dim(V) - \dim(D+V) = 1.$$

Donc, on a

$$\dim(d \cap V) = 0$$

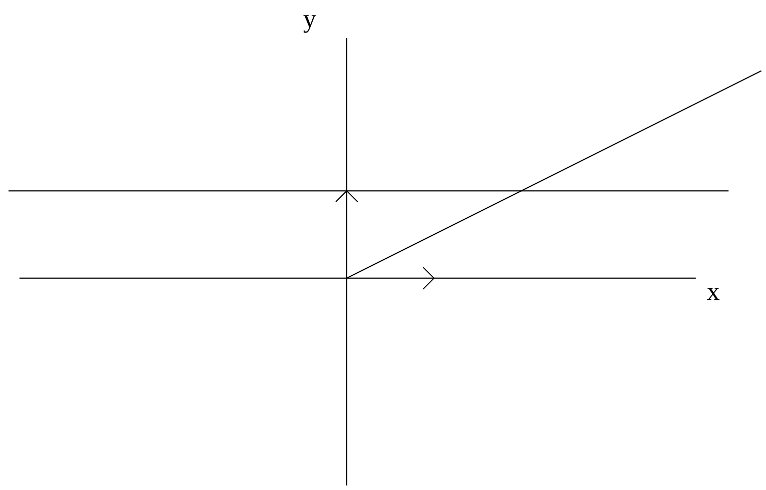
et on peut conclure. □

Ces démonstrations nous montrent bien que beaucoup des propriétés obtenues en projectif peuvent être déduites de propriétés connues pour les espaces vectoriels. On montre aussi facilement que par deux points il passe une droite et une seule (car il existe un unique plan vectoriel contenant deux vecteurs libres).

2.4. Connexions entre affine et projectif. — Soit $P(E)$ une droite projective issue d'un espace vectoriel E (de dimension 2 donc). Soit (e_1, e_2) une base de E. Alors toutes les droites vectorielles rencontrent la droite affine $\mathcal{D}$ d'équation $y = 1$ sauf l'axe des x (qui lui est parallèle). Mieux, on a une bijection :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} \cup \{\infty\} & \to & P(E) \\ (x, 1) & \mapsto & \text{droite vectorielle de vecteur directeur } (x, 1) \\ \infty & \mapsto & \text{droite vectorielle de vecteur directeur } (1, 0) \end{array}$$

D'où l'idée que l'espace projectif de dimension 1 est une droite munie d'un point à l'infini. On remarque que si on muni l'espace $\mathcal{D} \cup \{\infty\}$ de la topologie de *compactifié d'Alexandrov* (ie une base de voisinage de ∞ est formée des complémentaires des compacts de $\mathcal{D}$ et la topologie induite sur $\mathcal{D}$ est la topologie usuelle (prendre $\mathcal{D} = \mathcal{C}$ par exemple), l'application ci-dessus devient un homéomorphisme.

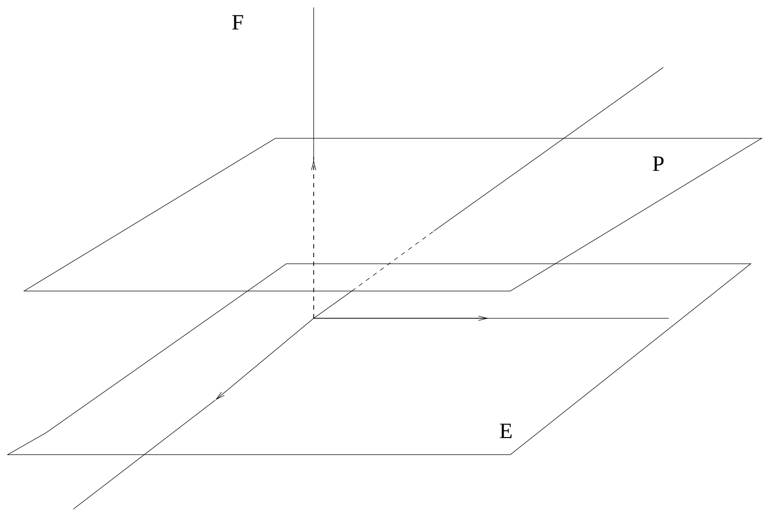


Soit $P(F)$ un plan projectif issu d'un espace vectoriel F (de dimension 3 donc). Soit (e_1, e_2, e_3) une base de F. Soit E le plan vectoriel d'équation $z = 0$ et soit P le plan affine d'équation $z = 1$. Une droite vectorielle de E rencontre le plan affine en un unique point sauf si elle est contenue dans E. On a donc une bijection :

$$P \cup P(E) \quad \longleftrightarrow \quad P(F).$$

Ici, les points $(x, y, 0)$ peuvent être vus comme les points à l'infini. L'hyperplan $P(E)$ s'appelle *l'hyperplan à l'infini*.

Ainsi, le plan projectif peut être vu comme un plan affine “complété” par une droite projective : la droite à l'infini.



Qu'en est-il des droites ? gardons les notations ci-dessus. Une droite de $P(F)$ est l'image d'un plan vectoriel de l'espace vectoriel de dimension 3. On trouve alors deux types de droites :

– La droite à l'infini qui correspond à $P(E)$,
– les autres droites projectives D qui correspondent, d'après la représentation en dimension 2, aux droites de l'espace affine P auxquelles on a ajouté un point à l'infini ∞_D (qui est sur $P(E)$).

En particulier, si on considère deux droites projectives D et D' distinctes d'un plan projectif, on a les différents cas :

– Si D est la droite à l'infini, D et D' se coupent en ∞_D.
– Si D et D' correspondent à deux droites affines non parallèles, elles se coupent dans le plan affine en un point M. Au niveau projectif, l'intersection des deux droites est le (ou plutot la classe d'équivalence du) vecteur $\overrightarrow{OM}$.
– Si D et D' correspondent à deux droites affines parallèles, elles se coupent en $\infty_D = \infty_{D'}$.

Dans le cadre général. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. Soit F l'espace vectoriel de dimension $n+1$ tel que $F = E \times \mathbb{K}$. On choisit alors un repère de sorte que E soit l'hyperplan d'équation $x_{n+1} = 0$ (ie x_{n+1} est la coordonnée de K) et on identifie $\mathcal{E}$ à l'hyperplan affine d'équation $x_{n+1} = 1$. Alors toute droite vectorielle non contenue dans E rencontre $\mathcal{E}$ en un unique point. Il suit une bijection :

$$P(F) \setminus P(E) \quad \to \quad \mathcal{E}$$

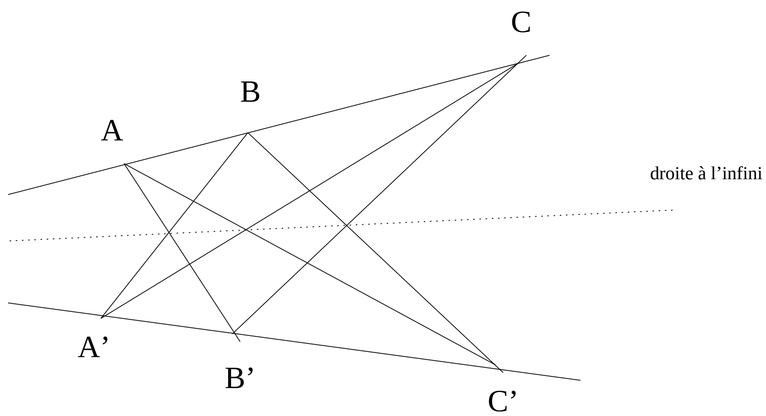
Ici, l'hyperplan $P(E)$ s'appelle l'hyperplan à l'infini. On parle parfois pour $\mathcal{E}$ de *carte affine*. $P(F)$ est la *complétion projective* de l'espace affine $\mathcal{E}$.

2.5. Points à l'infini : Les théorèmes de Pappus et Desargues revisités. — Dans un plan projectif, toutes les droites jouent le même rôle et n'importe quelle droite peut donc etre choisie comme représentant une droite à l'infini. Plus généralement, si on considère un espace projectif $P(E)$ et qu'on lui retire un hyperplan projectif $P(F)$ (avec F hyperplan vectoriel), on obtient un espace affine de direction F. Ainsi, tout hyperplan peut être vu comme hyperplan à l'infini !

Voici les énoncés des théorèmes de Pappus et de Desargues en projectif. Remarquons bien qu'ici deux droites se coupent toujours, éventuellement en l'infini si elles sont parallèles.

***Théorème 2.9* (de Pappus).** — *Soient deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'un plan projectif (qu'on pourra voir comme un plan affine réuni avec une droite à l'infini). Soient A, B, C trois points de $\mathcal{D}$ et soient A', B' et C' trois points de $\mathcal{D}'$. Alors les points d'intersection de $B'C$ et $C'B$, de $C'A$ et $A'C$ et de $A'B$ et $B'A$ sont alignés.*

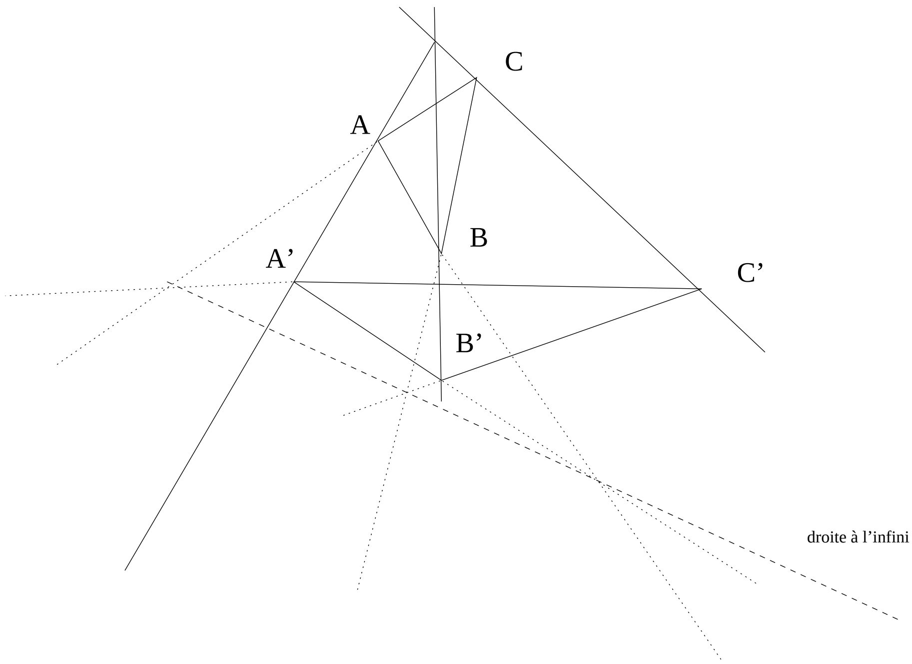
Démonstration. — Soit E le point d'intersection de BC' et $B'C$ et soit E' le point d'intersection de $A'C$ et AC'. On prend la droite EE' comme droite à l'infini. Dans le plan affine obtenu en supprimant cette droite, les droites BC' et $B'C$ sont parallèles (car elles ne se coupent pas) et $A'C$ et AC' également. D'après Pappus affine, les droites $A'B$ et $B'A$ sont aussi parallèles donc elles se coupent en l'infini. Les trois points sont donc sur cette droite. □



***Théorème 2.10* (de Desargues, sens direct).** — *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. Alors si les points d'intersection de BC et $B'C'$, de CA et de $C'A'$ et de AB et $A'B'$ sont alignés AA', BB' et CC' sont concourantes.*

Démonstration. — Si les trois points sont alignés, on considère la droite correspondante comme droite à l'infini. Alors AC et $A'C'$ sont parallèles ainsi que BC et $B'C'$ et AB et $A'B'$. D'après Desargues affine, les trois droites AA', BB' et CC' sont concourantes où parallèles donc toujours concourantes en projectif.

□



Pour ces deux théorèmes, on a bien sûr des démonstrations qui n'utilisent pas les résultats affines. Dans la partie suivante, on va donner une démonstration élégante de la réciproque grâce à la notion de dualité.

2.6. Un peu de dualité. — Une des plus intéressantes possibilités du plan projectif est la faculté de créer automatiquement de nouvelles figures et de nouveaux théorèmes à partir de la notion de dualité.

Soit E un espace vectoriel et soit F un sous espace vectoriel de E. Soit F' l'ensemble des formes linéaires qui s'annulent sur F, c'est un sous-espace vectoriel du dual E^* de dimension :

$$\dim(E) - \dim(F).$$

Cette formule se vérifie aisément en complétant une base $\{e_1, ..., e_s\}$ de F pour obtenir une base $\{e_1, ..., e_s, ..., e_n\}$ de E. Alors, E^* a pour base les e_i^* tels que $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$.

Supposons que l'on se trouve dans un espace vectoriel E de dimension 3. On a alors les correspondances suivantes :

Espace proj $P(E)$	**Espace vect.** E	**Dual** E^*	**Espace proj** $P(E^*)$
Point a	Droite vect a	Plan a'	Droite proj a'
Droite proj d	Plan vect d	Droite vect d'	Point d'

On a aussi la propriété suivante :

$$F \subset G \iff G' \subset F'$$

En gardant les notations du tableau ci-dessus, ceci a pour conséquance que

- Si a est un point de $P(E)$ contenu dans la droite projective D alors d' est un point de $P(E^*)$ appartenant à la droite projective A (qui correspond à a). Ainsi, une droite de $P(E^*)$ correspond à l'ensemble des droites passant par un même point a. L'ensemble de ces droites est appelée *faisceau de droites* passant par a et il est donc possible de mettre une structure d'espace projectif sur cet ensemble !
- Si a, a_1 et a_2 sont trois points alignés dans P alors ils correspondent à trois droites A, A'_1 et A'_2 concourantes dans $P(E^*)$.

Une jolie conséquence est la suivante :

***Théorème 2.11* (de Desargues, Réciproque)**. — *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. Alors si AA', BB' et CC' sont concourantes, les points d'intersection de BC et $B'C'$, de CA et de $C'A'$ et de AB et $A'B'$ sont alignés.*

Démonstration. — Les triangles ABC et $A'B'C'$ du plan P correspondent à des triangles de cotés A^*, B^*, C^* et A'^*, B'^*, C'^* du plan dual P^*. Soient abc et $a'b'c'$ ces deux triangles notés de façon à ce que a est le dual de la droite BC, etc ...

Les points d'intersection α, β, γ de BC et $B'C'$, de CA et de $C'A'$ et de AB et $A'B'$ correspondent à des droites qui sont aa', bb' et cc'. Finalement les droites AA', BB' et CC' sont des points de P^*. On pose $\mathfrak{a}$ le point d'intersection de A^* et A'^*, $\mathfrak{b}$ le point d'intersection de B^* et B'^*, $\mathfrak{c}$ le point d'intersection de C^* et C'^*,

Appliquons le sens direct du théorème de Desargues aux triangles abc et $a'b'c'$ dans P^*. Si AA', BB' et CC' sont concourantes c'est que les trois points $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ sont alignés. On sait alors aa', bb' et cc' sont concourantes donc α, β et γ sont alignés. □

3. Homographies et Birapport

Nous allons maintenant définir des applications entre espaces projectifs. Commes les droites constituent la structure de base d'un plan, les applications "naturelles" entre espaces projectifs vont conserver l'alignement.

3.1. Le groupe projectif. — On commence par la définition de telles applications. Comme d'habitude, ces applications vont être obtenues à partir des strctures d'espaces vectoriels.

Definition 3.1. — Soient E et F deux espaces vectoriels. On considère les deux projections naturelles :

$$\pi_E : E \setminus \{0\} \to P(E)$$

$$\pi_F : F \setminus \{0\} \to P(F)$$

Une application $g : P(E) \to P(F)$ est *une application projective* ou *une homographie* si il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $\widetilde{g} : E \to F$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{array}{ccc} E \setminus \{0\} & \xrightarrow{\widetilde{g}} & F \setminus \{0\} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_E} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_F} \\ P(E) & \xrightarrow{g} & P(F) \end{array}$$

Attention, une application linéaire de E dans F ne définit pas toujours une homographie, il faut pour cela que le noyau soit réduit à 0. En toute généralité, on obtient seulement une application de $P(E) \setminus P(\mathrm{Ker}(f))$ dans $P(F)$. Voici quelques propriétés évidentes des homographies.

Proposition 3.2. — 1. *Une homographie est bijective.*
2. *Si il existe une homographie entre deux espaces projectifs alors ces espaces ont même dimension.*
3. *La composée de deux homographies est une homographie.*
4. *L'inverse d'une homographie est une homographie.*
5. *Une homographie conserve l'alignement des points.*

Démonstration. — Ces propriétés sont des conséquences immédiates de la définition d'homographie et d'espaces projectifs. □

Ceci nous montre donc qu'on a une structure de groupe sur l'ensemble des homographies.

Definition 3.3. — Le groupe des homographies d'un espace projectif $P(E)$ dans lui-même est un groupe appelé *le groupe projectif* et il est noté $\mathrm{PGL}(E)$.

Remarquons que la définition d'une homographie induit l'existence d'une application surjective naturelle :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(E) & \to & \mathrm{PGL}(E) \\ \widetilde{g} & \mapsto & g \end{array}$$

C'est en fait un morphisme de groupes.

Proposition 3.4. — *On a un isomorphisme:*

$$\mathrm{GL}(E)/\{\textit{homothéties}\} \simeq \mathrm{PGL}(E)$$

Démonstration. — D'après la remarque ci-dessus, il suffit de montrer que le noyau de l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(E) & \to & \mathrm{PGL}(E) \\ g & \mapsto & \widetilde{g} \end{array}$$

est l'ensemble des homothéties. Supposons donc que f est un automorphisme de E induisant l'identité sur $P(E)$:

$$\begin{array}{ccc} E \setminus \{0\} & \xrightarrow{f} & E \setminus \{0\} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_E} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_F} \\ P(E) & \xrightarrow{Id} & P(E) \end{array}$$

Alors toute droite vectorielle de E est envoyée sur elle même. Autrement dit tout vecteur non nul est un vecteur propre de E. On vérifie alors facilement que l'on a une unique valeur propre et donc que f est une homothétie. □

Remarque 3.5. — Compte tenu de la définition d'homographie, les points fixes d'une homographie sont les vecteurs propres associés à l'application linéaire correspondante. Si le corps de base est $\mathbb{C}$, on a donc au moins un point fixe. Si le corps de base est $\mathbb{R}$ ce n'est plus vrai. Cependant si l'espace projectif réel est en dimension paire, l'espace vectoriel sous-jacent est de dimension impaire, on a donc au moins un point invariant.

3.2. Coordonnnées homogènes. — On aimerait maintenant pouvoir représenter les éléments de $P(E)$ au moyen de coordonnées. Soit donc E un espace vectoriel de dimension $n+1$. Soit $\{e_0, e_1, ..., e_n\}$ une base de E. Soit M un point de l'espace projectif $P(E)$. Alors, il existe $u \in E$ qui engendre la droite vectorielle correspondant à M. On associe à M les coordonnées $(x_0, ..., x_n)$ de ce vecteur. Remarquons que ces coordonnées ne sont jamais tous nuls puisqu'ils correspondent aux coordonnées d'un vecteur non nul.

Remarquons aussi que les $(n+1)$-uplets $(x_0, x_1, ..., x_n)$ et $(x'_0, x'_1, ...x'_n)$ représentent le même point M si et seulement si il existe un scalaire non nul λ tel que

$$\forall i \in \{0, 1, ..., n\},\ x'_i = \lambda x_i.$$

Definition 3.6. — La classe d'équivalence de $(x_0, ..., x_n)$ est appelée *les coordonnées homogènes* de M et on la note $(x_0 : ... : x_n)$ (aussi parfois $[x_0, ..., x_n]$).

On regarde maintenant les liaisons affine-projectif. On se donne un espace projectif de dimension $n+1$ et les coordonnées homogènes associés à cet espace. On introduit un espace affine H en posant $X_n = 1$ (voir le §2.4). On choisit un repère pour H de sorte que O est l'intersection de H avec la droite portée par e_n. Ainsi, à tout point $(X_0 : ... : X_n)$ de l'espace projectif, on fait correspondre le point de coordonnée $(\frac{X_0}{X_n}, ..., \frac{X_{n-1}}{X_n})$. Les points tels que $X_n = 0$ correspondent aux points a l'infini.

Considérons un polynôme homogène $P(X_0, ..., X_n)$ à $n+1$ variables et à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$. Comme ce polynôme est homogène, on peut considérer l'ensemble des points de l'espace projectif tels que :

$$P(X_0, ..., X_n) = 0.$$

En effet, si $P(u) = 0$ alors $P(\lambda u) = 0$ et tout cela est bien définie. L'ensemble de ces points est constitué de l'ensemble des points de H tels que

$$Q(x_0, ..., x_{n-1}) = 0$$

où Q est obtenu à partir de P en posant $X_n = 1$ et les points à l'infini vérifiant

$$R(x_0, ..., x_{n-1}) = 0,$$

où R est obtenu à partir de P en posant $X_n = 0$. Ainsi, la conique projective :

$$X^2 - XT - Y^2 - T^2 = 0$$

devient la conique affine

$$x^2 - x - y^2 - 1 = 0$$

et la partie à l'infini

$$X^2 - Y^2 = 0,$$

c'est à dire les deux points $(1 : 1 : 0)$ et $(1 : -1 : 0)$.

Réciproquement, si on a une équation affine $Q(x_0, ..., x_{n-1}) = 0$, on peut considérer que l'ensemble des éléments vérifiant cette équation n'est qu'un morceau d'un ensemble plus grand qui contient des points à l'infini (cf partie sur les coniques). On peut en particulier homogénéiser l'équation $P(X_0, ..., X_n) = 0$, les points à l'infini étant obtenus en posant $X_n = 0$. Par exemple :

$$x^2 + xy + y^3 - 2 = 0$$

s'homogénéise en :

$$x^2z + xyz + y^3 - 2z^3 = 0$$

et les points à l'infini vérifient $Z = 0$ et $Y^3 = 0$ c'est à dire le seul point $(1 : 0 : 0)$.

3.3. Repères projectifs. — A partir de la représentation d'une droite dans l'espace vectoriel, on a donc déterminé des coordonnées pour le point associé dans l'espace projectif.

On aimerait maintenant disposer d'une notion de repère dans ce cadre projectif. Donnons nous $n + 1$ points de cet espace, pour pouvoir maintenant obtenir des ccordonnées homogènes, il faut considérer les vecteurs associés dans l'espace vectoriel. Mais le problème ici est que ces vecteurs sont déterminé à un coefficient de proportionnalité près ! Par exemple, si on se donne une base (e_1, e_2, e_3) dans un espace vectoriel de dimension 3, on a des coordonnées homogènes $(X : Y : T)$ associés à tout élément M de l'espace projectif correspondant. Si on se donne maintenant la base $(2e_1, e_2, e_3)$, les vecteurs associés dans l'espace projectif sont exactement les mêmes ... mais les coordonnées homogènes d'un point M ont changé !

Ceci montre qu'il est nécessaire d'introduire une contrainte supplémentaire pour définir cette notion de repère projectif.

Definition 3.7. — Soit E un espace vectoriel de dimension $n+1$. Un $(n+2)$-uplet $(m_0, ..., m_{n+1})$ de $P(E)$ est un repère projectif de $P(E)$ si et seulement si m_1,...,m_{n+1} sont les images d'une base e_1, ..., e_{n+1} de E et si m_0 est l'image de $e_1 + ... + e_{n+1}$.

En particulier, dans une droite projective, trois points forment un repère projectif si et seulement si ils sont distincts. Dans un plan projectif, quatre points forment un repère projectif si et seulement si ils sont distincts et trois points quelconques d'entre eux ne sont pas alignés. Un tel repère s'appelle un quadrangle.

Les résultats suivants nous montrent que la définition ci-dessus est cohérente avec la notion d'espace projectif.

Lemme 3.8. — *Soit $(m_0, ..., m_{n+1})$ un repère projectif de $P(E)$. Soient $(e_1, ...e_{n+1})$ et $(e'_1, ...e'_{n+1})$ deux bases de E tel que $\pi_E(e_i) = \pi_E(e'_i) = m_i$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n+1\}$. Si de plus $\pi_E(e_1 + ... + e_{n+1}) = \pi_E(e'_1 + ... + e'_{n+1})$ alors les deux bases sont proportionelles.*

Démonstration. — Les points de $P(E)$ correspondent à des vecteurs de E. Donc pour tout $i \in \{1, ..., n+1\}$ il existe un scalaire λ_i tel que $e_i' = \lambda_i e_i$. De même, il existe μ tel que $e_1 + ... + e_{n+1} = \mu(e_1 + ... + e_{n+1})$. On conclut donc :

$$\mu(e_1 + ... + e_{n+1}) = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_{n+1} e_{n+1}$$

Comme les e_i forment une base, tous les λ_i sont égaux d'où le résultat. □

Ceci montre que si l'on dispose d'un repère projectif, la notion de coordonnées homogènes associées à ce repère est bien définie. Qu'en est-il du rapport entre homographies et repères projectifs ?

Théorème 3.9. — *Soient $P(E)$ et $P(F)$ deux espaces projectifs de dimension n.*

1. *Toute homographie de $P(E)$ vers $P(F)$ envoie un repère projectif sur un repère projectif.*
2. *Soient $(m_0, ..., m_{n+1})$ et $(m_0', ..., m_{n+1}')$ deux repères projectifs de $P(E)$ et $P(F)$. Il existe alors une unique homographie g de $P(E)$ sur $P(F)$ telle que $g(m_i) = m_i'$ pour tout $i = 0, 1, ..., n+1$.*

Démonstration. — Soit $g : P(E) \to P(F)$ une homographie et soit $(m_0, ..., m_{n+1})$ un repère projectif de $P(E)$. Pour $i = 1, 2, ..., n+1$, on pose $m_i' = g(m_i)$. Soit $\{e_1, ..., e_{n+1}\}$ une base de E tel que $\pi_E(e_i) = m_i$ pour tout $i = 1, 2, ..., n+1$. L'application $\widetilde{g} : E \to F$ est un isomorphisme donc $\{e_1' := \widetilde{g}(e_1), ..., e_{n+1}' := \widetilde{g}(e_{n+1})\}$ est une base de F et on a

$$\begin{aligned} m_0' &= g(m_0) \\ &= g(\pi_E(e_1 + ... + e_{n+1})) \\ &= \pi_F(\widetilde{g}(e_1' + ... + e_{n+1}')) \\ &= \pi_F(e_1' + ... + e_{n+1}') \end{aligned}$$

Pour le deuxième point, on choisit deux bases $\{e_1, ..., e_{n+1}\}$ et $\{e_1', ..., e_{n+1}'\}$ de E et F tel que $\pi_E(e_i) = m_i$ pour $i = 1, 2, ..., n+1$, $\pi_E(e_1 + ... + e_{n+1}) = m_0$, $\pi_F(e_i') = m_i'$ pour $i = 1, 2, ..., n+1$, $\pi_F(e_1' + ... + e_{n+1}') = m_0'$. Il existe une unique application linéaire de E sur F envoyant chaque e_i sur e_i'. L'homographie associée convient.

Si g' est une homographie convenant également alors $g' \circ g^{-1}$ est une homographie envoyant un repère projectif sur lui-même donc les bases associées sont proportionnelles d'après le lemme 3.8 donc $\widetilde{g' \circ g^{-1}}$ est une homothétie. $g' \circ g^{-1}$ est donc l'identité. □

3.4. Homographies de la droite. — On a vu avec le théorème 3.9 que pour connaître une homographie d'une droite projective vers elle-même, il suffit de connaître l'image de trois de ces points distincts. Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et soit $P(E)$ l'espace projectif associé. Une homographie f de $P(E)$ sur $P(E)$ provient d'une application linéaire $\widetilde{f} : E \to E$.

Considérons une base (e_1, e_2) de E. Alors, la matrice de l'application $\widetilde{f}$ dans cette base est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$$

Comme $\widetilde{f}$ est un isomorphisme, le déterminant de cette matrice est non nul. On a:

$$\widetilde{f}(z,1) = (a_{1,1}z + a_{1,2}, a_{2,1}z + a_{2,2})$$

Si $\lambda := a_{2,1}z + a_{2,2} \neq 0$, on a :

$$(a_{1,1}z + a_{1,2}, a_{2,1}z + a_{2,2}) = \lambda(\frac{a_{1,1}z + a_{1,2}}{a_{2,1}z + a_{2,2}}, 1)$$

Bref, si M est un élément de l'espace projectif :

- si M est le point à l'infini de coordonnée $(1:0)$, son image est $(a_{1,1}, a_{2,1})$.
- si M est de coordonnée $(z:1)$ avec $z \neq -\dfrac{a_{2,2}}{a_{2,1}}$, son image est $(\dfrac{a_{1,1}z + a_{1,2}}{a_{2,1}z + a_{2,2}}, 1)$.
- si M est de coordonnée $(-\dfrac{a_{2,2}}{a_{2,1}} : 1)$ avec son image est $(1, 0)$.

En représentant avec point à l'infini et en utilisant la convention $\frac{1}{0} = \infty$, l'application s'écrit

$$f(z) = \frac{a_{1,1}z + a_{1,2}}{a_{2,1}z + a_{2,2}}$$

3.5. Birapport. — Soit D une droite projective et soient trois points a, b et c de D distincts. Ces trois points forment donc un repère projectif. Il existe une unique homographie :

$$\begin{array}{rccc} g: & D & \to & \mathbb{K} \cup \{\infty\} \\ & a & \mapsto & \infty \\ & b & \mapsto & 0 \\ & c & \mapsto & 1 \end{array}$$

Definition 3.10. — Soit d un élément de D. Par définition le *birapport* de d est $g(d) \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$. On le note $[a, b, c, d]$.

Notons en particulier que

$$[a,b,c,d] = \begin{cases} \infty & \text{si } d = a \\ 0 & \text{si } d = b \\ 1 & \text{si } d = c \end{cases}$$

On a donc :

$$a, b, c, d \text{ distincts} \iff [a, b, c, d] \in K \setminus \{0, 1\}$$

De plus, les homographies étant bijectives, pour tout $k \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$, il existe un unique élément d de $P(E)$ tel que $[a, b, c, d] = k$.

La proposition suivante montre que le birapport se comporte bien vis à vis des homographies.

Proposition 3.11. — *Soient a_1, a_2, a_3 et a_4 (resp. a'_1, a'_2, a'_3 et a'_4) quatre points de D tels que a_1, a_2 et a_3 (resp. a'_1, a'_2 et a'_3) soient distincts. Alors il existe une unique homographie $f : D \to D'$ telle que $f(a_i) = a'_i$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ si et seulement si $[a_1, a_2, a_3, a_4] = [a'_1, a'_2, a'_3, a'_4]$.*

Démonstration. — Soit $f : D \to D'$ une homographie envoyant a_i sur a'_i pour $i = 1, 2, 3, 4$. Par définition, on a :

$$[a'_1, a'_2, a'_3, a'_4] = g(a'_4)$$

où g est l'unique homographie

$$\begin{array}{cccc} g: & D & \to & \mathbb{K} \cup \{\infty\} \\ & a'_1 & \mapsto & \infty \\ & a'_2 & \mapsto & 0 \\ & a'_3 & \mapsto & 1 \end{array}$$

Alors, l'homographie $g \circ f$ envoie a_1 sur ∞, a_2 sur 0 et a_3 sur 1. Donc :

$$[a_1, a_2, a_3, a_4] = g \circ f(a_4)$$

d'où le sens direct.

Réciproquement, on sait qu'il existe une unique homographie f envoyant a_1 sur a'_1, a_2 sur a'_2, a_3 sur a'_3. Gardant les notations ci-dessus, on a

$$g(a'_4) = g \circ f(a_4)$$

Donc a_4 est envoyé sur a'_4 car g est une bijection. □

Ceci se reformule de la manière suivante :

Théorème 3.12. — *Une bijection entre deux droites projectives est une homographie si et seulement si elle conserve le birapport.*

Démonstration. — On sait déjà qu'une homographie conserve le birapport. Réciproquement, si une bijection f conserve le birapport alors considérons trois points distincts d'une droite projective a, b et c. Alors, il existe une unique homographie h qui transforme a, b, c en $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ respectivement. Pour tout point m, on a :

$$[a, b, c, m] = [f(a), f(b), f(c), f(m)] = [f(a), f(b), f(c), g(m)]$$

d'où $g(m) = f(m)$.

□

On établit maintenant quelques propriétés utiles de ces birapports.

Proposition 3.13. — *Soit a, b, c et d sont des points de $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ alors :*

$$[a, b, c, d] = \frac{\dfrac{(d-b)}{(d-a)}}{\dfrac{(c-b)}{(c-a)}}$$

(avec comme convention $\dfrac{1}{0} = \infty$)

Démonstration. — L'homographie de D dans $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ définie par :

$$z \mapsto \frac{\dfrac{(z-b)}{(z-a)}}{\dfrac{(c-b)}{(c-a)}}$$

a un pôle en a et s'annule en b et envoie c sur 1 d'où le résultat par définition du birapport. □

Le lemme suivant va nous permettre de déterminer d'autres formules utiles pour le birapport.

Lemme 3.14. — *Soient a, b et c trois points distincts d'une droite projective $D = P(E)$ et soient x et y dans E tels que :*

$$\pi_E(x) = a,\ \pi_E(y) = b,\ \pi_E(x+y) = c$$

Alors

$$d = \pi_E(hx + ky) \iff [a, b, c, d] = \pi_{\mathbb{K}^2}(h, k)$$

Démonstration. — Les vecteurs x et y forment une base de E car a et b sont distincts. On a donc un isomorphisme f de E dans $\mathbb{K}^2$ qui envoie (x, y) sur la base canonique. Soit g l'homographie de $P(E)$ dans $P_1(\mathbb{K})$ associé à f.

$$\begin{array}{ccc} E \setminus \{0\} & \xrightarrow{f} & \mathbb{K}^2 \setminus \{0\} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_E} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathbb{K}^2}} \\ P(E) & \xrightarrow{g} & P_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \cup \{\infty\} \end{array}$$

g envoie a sur ∞ , b sur 0 et c sur 1 et comme $f(hx + ky) = (h, k)$ on a $g(d) = \pi_{\mathbb{K}^2}(h, k) = [a, b, c, d]$. □

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 3.15. — *Soient a_1, a_2, a_3 et a_4 quatre points alignés d'une droite projective, les trois premiers étant distincts. Soient $(\lambda_i : \mu_i)$ les coordonnées homogènes de ces points pour $i = 1, ..., 4$ par rapport à une base de E. Alors :*

$$[a_1, a_2, a_3, a_4] = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}} . \frac{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix}}$$

(avec comme convention $\frac{1}{0} = \infty$)

Démonstration. — Pour chaque a_i, on choisit un vecteur x_i engendrant sa droite vectorielle. Comme a_1 et a_2 sont distincts, les vecteurs x_1 et x_2 sont linéairement indépendant et donc x_3 et x_4 s'écrivent comme combinaison linéraire de ceux-ci. :

$$x_3 = \alpha x_1 + \beta x_2$$

$$x_4 = \gamma x_1 + \eta x_2$$

Posons $x = \alpha x_1$ et $y = \beta x_2$. On a alors :

$$x_4 = \frac{\gamma}{\alpha} x + \frac{\delta}{\beta} y.$$

Appliquons le lemme précédent :

$$[a_1, a_2, a_3, a_4] = \frac{\gamma}{\alpha} / \frac{\delta}{\beta}$$

On vérifie finalement la formule en exprimant α et β dans la base (e_1, e_2). Par exemple

$$\begin{cases} \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta = \lambda_3 \\ \mu_1 \alpha + \mu_2 \beta = \mu_3 \end{cases}$$

donne :

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 \\ \mu_3 & \mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}}$$

□

Enfin, dernières formules utiles ...

Proposition 3.16. — *On a les propriétés suivantes.*

- *Si a, b et c sont trois points d'une droite affine, on a :*

$$[a, b, c, \infty_D] = \frac{\overline{ac}}{\overline{bc}}$$

- *Si a, b, c et d sont quatre points alignés distincts, on a les égalités :*

$$[a, b, c, d] = [b, a, c, d]^{-1} = [a, b, d, c]^{-1}$$

Démonstration. — Pour la première assertion, on peut chosisir les coordonnées pour que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ et $\mu_4 = 0$ et on utilise la proposition ci-dessus. La deuxième assertion est clair via la proposition 3.13. □

4. Etude des Homographies

Le but de cette section est d'étudier plus en détail cette notion d'homographie.

4.1. Homographies et transformation affines. — Le théorème suivant nous donne les liens entre homographies et transformations affines.

Proposition 4.1. — *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et soit $P(E \times \mathbb{K})$ sa complétion projective. Alors*

1. *Toute homographie de $P(E \times \mathbb{K})$ qui préserve l'hyperplan à l'infini agit sur E comme une application affine.*
2. *Toute application affine bijective de E dans lui-même se prolonge de manière unique en une homographie de $P(E \times \mathbb{K})$ dans $P(E \times \mathbb{K})$*

Démonstration. — Soit g une homographie de $P(E \times \mathbb{K})$ dans lui-même. Si l'hyperplan à l'infini $P(E)$ est envoyé sur l'hyperplan à l'infini $P(E)$, cette application induit une application ϕ de $\mathcal{E}$ (l'espace affine qui est le complémentaire de $P(E)$) sur $\mathcal{E}$. Montrons que cette application est affine. Remarquons que l'on a nécessairement l'existence d'un automorphisme h tel que :

$$\widetilde{g}(u,0) = (h(u),0) \in E \times \mathbb{K} \quad \widetilde{g}(0,1) = (v,a) \in E \times \mathbb{K}$$

où a est un scalaire non nul. En fait, f peut être choisi de sorte que $a = 1$ c'est à dire pour que $\widetilde{g}(0,1) \in \mathcal{E}$ (rappellons que celui-ci correspond à l'hyperplan $x_{n+1} = 1$). Soit O le point $(0,1)$ de $\mathcal{E}$. Alors pour tout point M de coordonnée $(u,1)$, on a

$$\overrightarrow{\phi(O)\phi(M)} = (h(u),0)$$

donc ϕ est bien affine, l'application linéaire associé étant h.

Réciproquement, si ϕ est une application affine et h l'isomorphisme linéaire qui lui est associé, on lui associe l'application de $E \times \mathbb{K}$ vers $E \times \mathbb{K}$ telle que

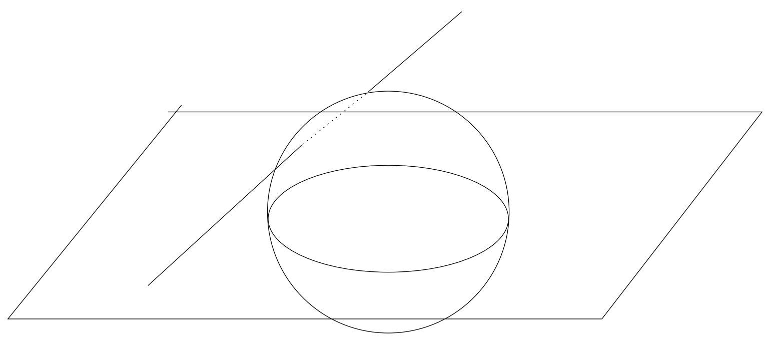
$$f(u,a) = a\phi(0,1) + (h(u),0)$$

alors f coincide avec h sur E et ϕ sur $\mathcal{E}$. Cette application est clairement un automorphisme et donc on a une homographie associée vérifiant les propriétés ci-dessus. L'unicité est clair.

$\square$

4.2. La droite projective complexe. — Dans cette partie, le corps de base sera $\mathbb{C}$ et on s'intéresse au groupe $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$, groupe des homographies de $P_1(\mathbb{C})$. Notons ici que l'on peut voir cet espace comme la complétion projective de la droite complexe $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, parfois appelé *Sphère de Riemann.* La représentation d'un tel espace peut se faire via la *projection stéréographique* : dans $\mathbb{R}^3$, on se donne la sphère de rayon 1 et dont le centre est l'origine O. Soit $\mathcal{P}$ le plan $\{(u,v,0) \mid (u,v) \in \mathbb{R}^2\}$ représentant le plan complexe. Soit N le point $(0,0,1)$. Alors la projection stéréographique envoie tout point M de la sphère sur le point $L = \mathcal{P} \cap MN$.

Il est clair que ceci définit une bijection de $\mathcal{S} \setminus \{\infty\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{\infty\}$. Il reste enfin à envoyer N de la sphère sur ∞



On a vu que $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$ est donc donné par les homographies f tels que :

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

avec

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

Ici, le corps de base est bien $\mathbb{C}$, la droite projective complexe peut donc être vue comme la droite complexe $\mathbb{C}$ auquelle on a ajouté un point à l'infini (et non une droite contrairement à $P(\mathbb{R}^2)$). On s'intéressera donc en particulier à cet ensemble $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ où $\mathbb{C}$ est vu comme le plan affine euclidien.

Proposition 4.2. — *Le groupe $PGL(2,\mathbb{C})$ est engendrée par les applications de la forme :*

$$z \mapsto az + b$$

qui provient d'une similitude directe et l'application

$$z \mapsto \frac{1}{z}$$

Démonstration. — Il suffit de remarquer que

$$\frac{az+b}{cz+d} = \begin{cases} \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc-ad}{c}\dfrac{1}{cz+d} & \text{si } c \neq 0 \\ \dfrac{az+b}{d} & \text{si } c = 0 \end{cases}$$

□

Une homographie conserve t-elles les angles ? il faut déjà préciser cette notion car les homographies ne conservent pas les droites ! Considérons donc deux courbes qui se coupent en un point. Par angle entre deux courbes, on entendra ici l'angle entre les tangentes des deux courbes en leur point d'intersection.

Théorème 4.3. — *Les homographies conservent les angles (non orientés)*

Démonstration. — C'est évident pour les similudes. Concernant l'inversion, pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on a :

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

L'inversion correspond donc à une application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que :

$$F(x,y) = (\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2})$$

dont la matrice jacobienne est :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

Le changement de variable $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ nous donne :

$$J = -\frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

C'est donc la composée d'une rotation avec une homothétie.

□

Remarque 4.4. — Notons que le birapport de quatre points alignés sur une droite affine réel correspond au birapport de ces quatre points comme élément de la droite affine complexe. c'est une conséquence immédiate de la définition (si f est l'unique homographie de $PGL(2,\mathbb{C})$ envoyant a, b, c sur 0, 1, ∞, elle définit l'homographie de $PGL(2,\mathbb{R})$ donnant le birapport sur la droite affine réel.)

Proposition 4.5. — *Pour que quatre points a, b, c et d de $\mathbb{C}$ soient alignés (sur une droite affine réelle) ou cocylique, il faut et il suffit que leur birapport soit réel.*

Démonstration. — Si a, b et c sont disctincts et si d coincide avec un de ces points alors ils sont alignés et leur birapport est bien réel. On se place donc dans le cas où les points sont distincts. Dans ce cas, le birapport est d'après la proposition 3.13 :

$$\frac{\frac{c-a}{c-b}}{\frac{d-a}{d-b}}$$

et son argument est :

$$(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})-(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}).$$

Cette argument est donc nul si et seulement si les quatre points sont cocycliques ou alignés. □

Corollaire 4.6. — *Une homographie de la droite projective complexe transforme un cercle ou une droite de $\mathbb{C}$ en un cercle ou une droite de $\mathbb{C}$*

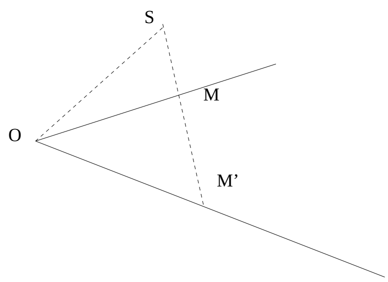
Démonstration. — évident via la proposition précédente. □

Remarquons que les cercles et les droites du plan complexe sont les images des cercles via l'inverse de la projection stérérographique. Ainsi dans $P_1(\mathbb{C})$ il est finalement naturel de les appeller les cercles de $P_1(\mathbb{C})$ ce qui simplifie l'énoncé ci-dessus. Réciproquement, si on se donne un cercle dans la sphère de Riemann, si celui-ci passe par N, il correspond à une droite du plan complexe, sinon à un cercle ...

Remarque 4.7. — On peut définir un autre groupe, contenant le groupe projectif et appelée le groupe circulaire. C'est le groupe engendré par les homographies et la symétrie $z \mapsto \overline{z}$. On peut montrer que les éléments de ce groupe préservent les angles et l'ensemble des cercles et droites.

4.3. Projections-Involutions. — On étudie ici des homographies particulières. Citons tout d'abord le cas des projections, utilisés par exemple pour démontrer le premier théorème de Desargues.

Definition 4.8. — Soient d et d' deux droites projectives distinctes d'un plan projectif et soit S un point de ce plan n'appartenant ni à d ni à d'. L'application de d dans d' qui à un point M associe le point M', intersection de SM' et de d' est appelée *la projection* de centre S de d sur d' (ou perspective).



Proposition 4.9. — *Une projection et une homographie.*

Démonstration. — On peut montrer qu'une projection est une bijection conservant le birapport et utiliser le théorème 3.12. (cf [**5**, Prop 2.1] pour plus de détails)

Voici une autre démonstration. On remarque tout d'abord qu'une projection est clairement une bijection. On se donne ensuite un repère projectif $(A, O, C, S) = (1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1), (1 : 1 : 1)$ tel que OC soit la droite d et AO la droite d'. Donc d a pour équation $X = 0$ et d' a pour équation $Z = 0$.

Si M est un élément de d, ses coordonnées sont $(0 : Y : Z)$ et il est transformé en un point M' de coordonnée $(X' : Y' : 0)$. Les points S, M et M' étant alignés, on a :

$$\begin{vmatrix} 0 & X' & 1 \\ Y & Y' & 1 \\ Z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

donc :

$$X'(Y - T) + Y'T = 0$$

On vérifie que ceci correspond à :

$$X' = -T,\ Y' = Y - T$$

(si $X' = 0$ alors $T = 0$, si $T = 0$ alors $X' = 0$, sinon, on peut poser $X' = -T$ ...). Ceci correspond à une transformation linéaire d'où le résultat. □

Proposition 4.10. — *Une homographie entre deux droites distinctes est une projection si et seulement si le point d'intersection est transformé en lui-même.*

Démonstration. — Le sens ⇒ est trivial. Réciproquement, soit f une homographie entre d et d' tel que O, le point d'intersection de d et d' est fixe. Soient a et b deux points distincts de d et distincts de O, alors $a' = f(a)$ et $b' = f(b)$ sont distincts aussi de O. Soit S le point d'intersection de aa' et bb' et soit p la projection de d sur d' de sommet S. On a alors $p(a) = a'$, $p(b) = b'$, $p(O) = O$. Donc p et f coincident (car les images d'un repère projectif coincident).

□

On peut donner ici une application à cette notion de projection : on va donner une nouvelle démonstration au premier théorème de Desargues (voir le théorème 2.10).

Soient $P = AB \cap A'B'$, $Q = BC \cap B'C'$ et $R = CA \cap C'A'$. Soit π_1 la projection de AA' sur BB' par rapport a P et soit π_2 la projection de BB' sur CC' par rapport à Q. D'après la proposition précédente, la composée π de ces deux homographies est une projection de AA' sur CC'. Comme $\pi(A) = C$ et $\pi(A') = C'$, le point R est le centre de cette projection. Le point $M_0 = PQ \cap AA'$ est sur PQ et $\pi(M_0)$ également et comme la droite $M_0\pi(M_0)$ passe par R, R est également sur PQ.

Passons maintenant très rapidement aux involutions (très bien traités dans [**5**] et aussi dans [**3**]):

Definition 4.11. — On dit qu'une homographie $f : d \to d$ d'une droite projective est une involution si elle est distincte de l'identité et si elle vérifie $f \circ f = \mathrm{Id}$.

L'inversion ou la symétrie de la droite projective complexe sont des exemples d'involution.

Proposition 4.12. — *Soit A_1, A_2, A_3 et A'_1, A'_2, A'_3 des repères de droites projectives. Alors l'homographie envoyant A_i sur A'_i (avec $i = 1, 2, 3$) est une involution si et seulement si on a :*

$$[A_1, A_2, A_3, A'_i] = [A'_1, A'_2, A'_3, A_i]$$

pour au moins un $i \in \{1, 2, 3\}$.

Démonstration. — voir [**5**, Prop. 3.3].

□

Ces involutions permettent de démontrer le deuxième théorème de Desargues dont voici l'énoncé.

Théorème 4.13 **(Deuxième théorème de Desargues)**
Soit D une droite ne passant pas par les sommets d'un quadrangle. Alors, les cotés opposés du quadrangle coupent la droite en des points qui se correpondent dans une même involution.

4.4. Construction des images d'une homographies. — Dans cette partie, on veut résoudre le problème suivant : on dispose de deux droites D et D' et d'une homgraphie de D sur D' envoyant trois points M_1, M_2 et M_3 de D sur trois points M'_1, M'_2 et M'_3 de D'. On sait qu'une homographie est uniquement définie par cette propriété.

Soit maintenant M un point de D, on désire construire l'image M' de ce point par l'homographie ci-dessus. Pour ceci, on suppose que $M - 1$ n'est pas le point d'intersection des deux droites (sinon, on prend M_2). On choisit deux points S et S' sur la droite $M_1M'_1$. Soit $I = SM_2 \cap S'M'_2$, $J = SM_3 \cap S'M'_3$, $L = IJ \cap SS'$. Alors les droites SM et $S'M'$ doivent se couper unr la droite IJ ce qui détermine M'. On a en effet :

$$[M_1, M_2, M_3, M] = [M'_1, M'_2, M'_3, M'] = [L, I, J, K]$$

Si $D = D'$, il suffit de composer par une projection sur une droite quelconque et utiliser le procédé ci-dessus.

5. Les coniques via la géométrie projective

5.1. Coniques affines et projectives. — Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Par définition, une quadrique affine est la classe d'équivalence d'un polynôme du second degré $f : E \to \mathbb{K}$ sous la relation $f \sim g$ si et seulement si $g = \lambda f$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$. L'image de la quadrique est l'ensemble des points M telle que $f(M) = 0$. Une quadrique planaire est appelée une conique.

Une quadrique est donnée par une relation du type :

$$f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + L(\overrightarrow{OM}) + c$$

où q est un forme quadratique non nulle, L une forme linéaire et c une constante.

La quadrique est dite propre si la forme définie sur $E \times \mathbb{K}$ par :

$$Q(u, z) = q(u) + L(u)z + cz^2$$

est non dégénérée. Cette forme est appelée l'homogénéisée de q.

On se place maintenant dans un espace projectif de dimension n. Les quadriques de cet espace sont données par la définition suivante.

Definition 5.1. — On appelle *quadrique* de $P_n(\mathbb{K})$ la donnée d'une forme quadratique non nulle en $n + 1$ variables $Q(x_1, ..., x_{n+1})$, à coefficient dans $\mathbb{K}$ et modulo la multiplication par un scalaire. Si Q est une telle forme, l'ensembles des $(x_1 : .... : x_{n+1})$ de $P_n(\mathbb{K})$ tel que $Q(x_1 : ... : x_{n+1}) = 0$ est appelé l'image de la quadrique. Si la (une des) forme quadratique est non dégénéreée, on dit que la quadrique est *propre*. *Une conique* est une quadrique du plan.

On examine maintenant le rapport entre conique affine et projective. On plonge donc $\mathbb{K}^n$ dans $P_n(\mathbb{K})$ par :

$$(x_1, ..., x_n) \mapsto (x_1 : ... : x_n : 1)$$

Sot α une quadrique affine de $\mathbb{K}^n$ d'équation :

$$f(x_1, ..., x_n) = q(x_1, ..., x_n) + l(x_1, ..., x_n) + c$$

où, comme d'habitude, q est une forme quadratique non nul, l une forme linéaire et c une constante. La forme quadratique homogénéisée de f est :

$$Q(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = q(x_1, ..., x_n) + l(x_1, ..., x_n)x_{n+1} + cx_{n+1}^2$$

On a $f(x_1, ..., x_n) = 0$ si et seulement si $Q(x_1, ..., x_n, 1) = 0$. Il suit que l'image de la quadrique affine est l'intersection de la quadrique projective d'équation Q avec $\mathbb{K}^n$ (ici $\mathbb{K}^n$ est identifié au complémentaire de l'hyperplan à l'infini $x_{n+1} = 0$).

Réciproquement, si on part d'une conique projective qui a pour équation $Q(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = 0$, la déshomogénéisation $Q(x_1, ..., x_n, 1) = 0$ fournit une quadrique affine de $\mathbb{K}^n$ si ce polynôme est bien de second degré ie si x_{n+1} ne divise pas Q. Bref, on a une bijection :

$$\begin{array}{c}\text{Quadrique Projective}\\ \text{ne contenant pas l'hyperplan à l'infini}\end{array} \longleftrightarrow \text{Quadrique Affine}$$

Du point de vue des coniques, une équation d'une conique affine est :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$$

qui s'écrit matricellement :

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

et l'équation homogénéisée est :

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

on peut donc associer à la forme quadratique de la conique affine de matrice :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

la forme quadratique d'une conique projective d'équation

$$\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Notons que la condition pour une conique de passer par un point se traduit par une équation homogène à 6 inconnues. On en déduit qu'étant donné cinq points, il y a toujours une conique qui passe par ces cinq points et on a même l'unicité si le rang du système d'équations est 5 (rappellons qu'une solution est ici une droite vectorielle !).

5.2. Intersection d'une droite et d'une quadrique. — Soit M et N deux points distincts de $P_n(\mathbb{K})$ de coordonnées respectives $(x_1 : ... : x_{n+1})$ et $(y_1 : ... : y_{n+1})$. La droite projective MN se paramétrise par $\lambda x + \mu y$ où $x = (x_1, ..., x_{n+1})$ et $y = (y_1, ..., y_{n+1})$ désignent les coordonnées homogènes de M et N. L'intersection de MN avec la quadrique projective d'équation Q est donnée grâce à l'équation :

$$Q(\lambda x + \mu y) = \lambda^2 Q(x) + 2\lambda\mu B(x, y) + \mu^2 Q(y) = 0$$

où B désigne la forme polaire. On obtient alors une forme quadratique en λ et μ. Donc, on a :

- une intersection vide si cette forme est irréductible,
- deux points d'intersection si cette forme se factorise en produit de deux formes linéaires non proportionnelles,
- un point d'intersection (double) si cette forme est une constante par le carré d'une forme linéaire non nulle.
- la droite elle-même si la forme est nulle.

La droite MN est dite tangente à la quadrique si et seulement si elle rencontre la quadrique en un point double ou si elle est contenue dedans.

Si on prend un point M_0 de coordonnées homogènes x_0 sur la quadrique, l'intersection de la droite M_0M et de la quadrique est donnée par

$$\mu(2\lambda B(x_0, x) + \mu Q(x)) = 0$$

La droite est tangente si et seulement si $B(x_0, x) = 0$.

Remarque 5.2. — On peut vérifier que cette notion de tangente est cohérente avec la définition usuelle.

Proposition 5.3. — *Soit M et N deux points distincts de $P_n(\mathbb{K})$. On suppose que la droite MN coupe une quadrique en 2 points distincts U et V alors M et N sont conjugués si et seulement si $[M, N, U, V] = -1$. On dit que M, N, U et V sont en division harmoniques.*

Démonstration. — C'est un calcul simple en se donnant une base et la formule du birapport (cf [**1**, P.187-188]). □

5.3. Classification des coniques. — Le groupe projectif $PGL_{n+1}(\mathbb{K})$ agit sur l'ensemble des quadriques de $P_n(\mathbb{K})$ de la façon suivante. Soit f une homographie de $P_n(\mathbb{K})$ et α une quadrique de cet espace projectif d'équation Q. f provient d'un isomorphisme g. Alors $Q \circ g^{-1}$ est aussi une forme quadratique non nulle.

La classification des quadriques projectives est la détermination des orbites sous cette action.

Notons que l'image de la quadrique obtenue est l'image par f de la quadrique $\mathcal{C}$. En effet, le point n est dans l'image $f(\mathcal{C})$ si et seulement si il provient d'un vecteur non nul v tel que $Q \circ g^{-1}(v) = 0$. Soit m l'image dans $P(E)$ de l'unique vecteur u de E tel que $g(u) = v$. On a ainsi $n = f(m)$. Le fait $Q \circ g^{-1}(v) = 0$ est équivalent à $Q(u) = 0$ et ceci est équivalent au fait que m est dans l'image de $\mathcal{C}$.

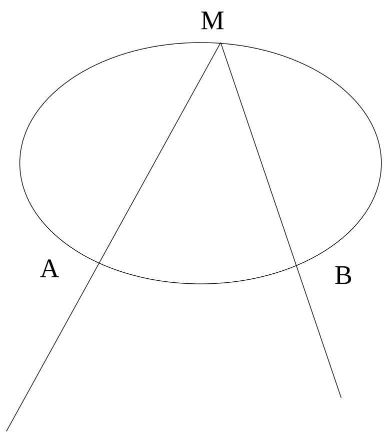
La classification des quadriques projectives se ramènent donc plus ou moins à la classification des formes quadratiques qu'il est important de connaitre (voir par exemple [**1**, Ch.6-Prop. 3.6] et [**1**, Ch.7] ou [**4**] qui contient l'essentiel de ce qu'il faut savoir sur les coniques.).

5.4. Homographies et coniques. — Dans cette partie, on se donne deux application classiques concernant les coniques, les homographies et le birapport.

Dans cette partie, on travaille dans le plan projectif sur $\mathbb{R}$ et on se donne une conique $\mathcal{C}$ non dégénérée dans ce plan. L'ensemble des droites passant par A, appelée faisceau de droites passant par A et noté F_A a une structure d'espace projectif par §2.6.

Plus précisemment, dans le plan projectif, chaque droite d'équation $ax+by+cz = 0$ s'envoie sur le point du dual de coordonnée homogène $(a : b : c)$. Une droite projective dans le dual correspond donc à un faisceau de droite.

Chaque droite D qui passe par A coupe la conique $\mathcal{C}$ en un point $c_A(D)$ qui peut être A (si on a qu'un point d'intersection ie si la droite est la tangente à $\mathcal{C}$ passant par A) ou ... un autre point de $\mathcal{C}$.



***Théorème 5.4* (de Steiner).** — *Si A et B sont deux points distincts de $\mathcal{C}$, l'application ϕ de F_A sur F_B définie par $\phi = c_B^{-1} \circ c_A$ est une homographie.*

Démonstration. — On se donne un repère projectif tel que $A = (1 : 0 : 0)$, $B = (0 : 1 : 0)$ et on peut supposer que le point $C = (0 : 0 : 1)$ est sur la conique. L'équation générale de la conique est de la forme suivante.

$$Q(x, y, t) = ax^2 + by^2 + cxy + dxt + eyt + ft^2 = 0$$

en écrivant que les trois points A, B et C sont sur la conique, on obtient que $a = b = f = 0$ d'où :

$$cxy + dxt + eyt = 0$$

les droites de F_A ont pour équation

$$y - \alpha t = 0$$

($t = 0$ correspond à $\alpha = \infty$). Les coordonnées $(u : v : w)$ du deuxième point d'intersection de la droite paramétrée par α avec la conique vérifient

$$\frac{u}{w} = -\frac{e\alpha}{c\alpha + d}$$

$$\frac{v}{w} = \alpha$$

De même pour B :

$$\frac{v}{w} = -\frac{d\alpha'}{c\alpha' + e}$$

$$\frac{u}{w} = \alpha'$$

On obtient :

$$\alpha' = -\frac{e\alpha}{c\alpha + d}$$

On vérifie que ceci fournit bien une transformation projective.

□

Ce théorème montre en particulier que si m_1, m_2, m_3 et m_4 sont sur une conique, le birapport $[mm_1, mm_2, mm_3, mm_3, mm_4]$ ne dépend pas du choix de m sur la conique ! (à verifier)

On s'intéresse maintenant à la réciproque de ce théorème :

Théorème 5.5. — *Si ϕ est une homographie du faisceau F_A vers le faisceau F_B alors l'intersection d'une droite H de F_A avec la droite $\phi(H)$ de F_B engendre une conique qui contient A et B.*

Démonstration. — Gardant les mêmes notations que dans la démonstration précédente, si on a une homographie de F_A vers F_B, la relation est de la forme suivante.

$$\alpha' = -\frac{u\alpha + v}{w\alpha + t}.$$

Quitte à composer une homographie convenable, on peut donc supposer

$$\alpha' = -\frac{e\alpha}{c\alpha + d}.$$

Le calcul précédent montre que le point d'intersection d'une droite de F_A et d'une droite de F_B décrit une conique contenant A et B.

□

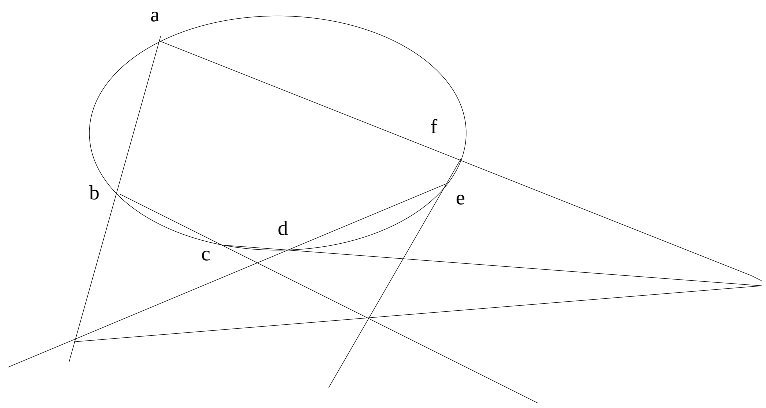
Le théorème de Pascal va maintenant etre une conséquence des propriétés ci-dessus. Etant donnés quatre points m_1, m_2, m_3 et m_4 sur une conique, on a vu qu'on pouvait definir le birapport des quatre points comme étant $[mm_1, mm_2, mm_3, mm_4]$ où m est un autre point sur la conique. Si D est une droite ne passant pas par m et p_i les points d'intersections de D et mm_i, c'est aussi $[p_1, p_2, p_3, p_4]$.

En effet, soient $u_iX + v_iY + w_iT = 0$ les équations des droites mm_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Dans le dual, ces droites correspondent à des points d_i de coordonnées (u_i, v_i, w_i). Dans $P(E)$, on prend D comme étant la droite à l'infini d'équation $T = 0$. Alors, les coordonnées des p_i sont $(-v_i, u_i, 0)$. Il suit que les p_i sont les images des droites mm_i par la transformation d'équation :

$$X = -v,\ Y = u,\ T = 0$$

Ceci correspond à une homographie. On a donc conservation du birapport, d'où :

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = [mm_1, mm_2, mm_3, mm_4]$$



Théorème 5.6 **(de Pascal).** — *Sur une conique propre $\mathcal{C}$, on prend six points deux à deux distincts a, b, c, d, e et f qui donnent un hexagone. Alors les intersections $z = ab \cap de$, $v = bc \cap ef$, $o = cd \cap fa$ sont alignés.*

Démonstration. — On pose $x = bc \cap ed$, $y = cd \cap ef$. On veut montrer que l'intersection de bc et ef est sur zt. On calcule pour ceci le birapport $[z, x, d, e]$, on a :

$$[z, x, d, e] = [bz, bx, bd, be]$$

ensuite $bz = ba$, $bx = bc$, en utilisant le corollaire :

$$[z, x, d, e] = [fa, fc, fd, fe]$$

d'où :

$$[z, x, d, e] = [to, c, d, y]$$

ce qui implique que les droites zt, xc, ey sont concourantes. En effet, il existe une unique homographie envoyant z, x, d, e sur o, c, d, y respectivement. C'est une projection d'après la proposition 4.10 (l'intersection des deux droites étant un point fixe). Par unicité du centre, on a le résultat.

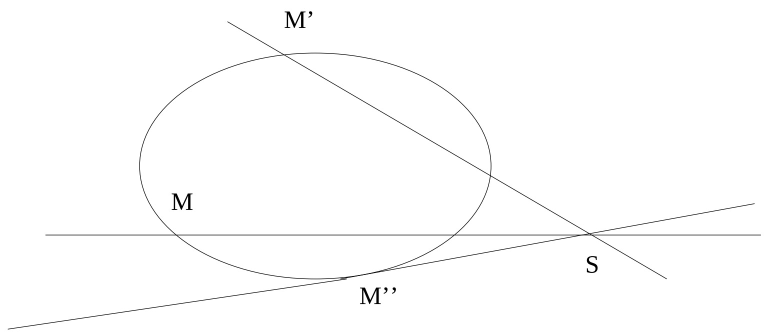
□

Ainsi, les sommets opposés d'un hexagone inscrit dans une conique se coupent en des points alignés. Ce théorème admet une réciproque connue sous le nom de théorème de Brianchon (cf [**5**] par exemple).

Comme on a définit le birapport de points sur une conique propre, on peut naturellement définir la notion d'homographie d'une conique propre : c'est une bijection qui conserve le birapport.

Théorème 5.7 **(Frégier).** — *Une homographie Φ d'une conique $\mathcal{C}$ propre est une involution (ie $\Phi \circ \Phi = Id_{\mathcal{C}}$ et $\Phi \neq Id_{\mathcal{C}}$) si et seulement si la droite $M\Phi(M)$ passe par un point fixe quelque soit le point M de $\mathcal{C}$.*

Démonstration. — Voir [**3**, Théorème 3.2.7] et [**5**, Théorème 5.4]. □



Références

[1] M. Audin, *Géométrie* Belin, 1998.
[2] J. Fresnel, *Géométrie*, IREM de Bordeaux, 1991 (ISBN 2-907274-03-1)
[3] R.Rolland *Geometrie projective*, http://iml.univ-mrs.fr/ rolland/rr/lycees/pr0.pdf.
[4] P. Samuel *Projective Geometry*, Springer.
[5] J-C. Sidler *Géométrie projective*, DUNOD, 1993.

Nicolas Jacon, UFR Sciences et techniques - 16, route de Gray - 25 030 Besançon cedex.
E-mail : njacon@univ-fcomte.fr