
COMBINATOIRE DES CRISTAUX D'ESPACES DE FOCK ET APPLICATIONS

par

N. Jacon

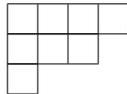
Résumé. — Les cristaux d'espaces de Fock sont des objets combinatoires initialement définis dans le cadre de la théorie des représentations du groupe quantique en type A affine. Il s'avère que diverses propriétés de ces objets permettent de résoudre des problèmes naturels et fondamentaux issus de la théorie des représentations des groupes de réflexions et de leurs déformations. Le but de cet article est de présenter cette théorie et certaines de ses applications.

1. Introduction

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ et soit \mathfrak{S}_n le groupe symétrique associé. On sait, depuis les prémisses de la théorie des représentations par Frobenius et Dedekind, classifier les représentations irréductibles de \mathfrak{S}_n sur le corps des nombres complexes (ou, de façon équivalente les modules simples sur l'algèbre du groupe $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$.) Celles-ci sont naturellement paramétrées par des objets combinatoires : les *partitions* de n . Une partition λ de n est une suite d'entiers positifs $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ où $r \in \mathbb{N}_{>0}$ vérifiant $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0$ (par convention, on identifiera tout partition $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0)$). On note $\lambda \vdash n$. L'unique partition de 0 est notée \emptyset . Notons $\text{Irr}(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n)$ l'ensemble de ces modules simples. On peut donc écrire :

$$\text{Irr}(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n) = \{V^\lambda \mid \lambda \vdash n\}.$$

Chaque $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ -module simple se construit explicitement. Des formules de caractères sont disponibles et donc en particulier des formules pour les dimensions des \mathbb{C} -espaces vectoriels V^λ . Pour ce dernier problème, on peut procéder de la manière suivante. On associe à chaque partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ de n , son *diagramme de Young*, une collection de cellules disposées sur r lignes, la i ème ligne du diagramme comportant exactement λ_i cellules. Par exemple, la partition $(4, 3, 1)$ de 8 a pour diagramme de Young :



Grâce à ce nouvel outil combinatoire, on peut construire un graphe dont les sommets sont toutes les partitions possibles. C'est un graphe infini, partant du diagramme de Young de la partition vide, et où deux diagrammes de Young sont reliés par une flèche si et seulement si l'un est obtenu à partir de l'autre en rajoutant une boîte. On obtient le *graphe de Young* (voir la figure 1).

La dimension d'un module simple V^λ est alors aisée à calculer, il suffit pour ceci de compter le nombre de chemins possibles dans le graphe de Young, du diagramme de Young vide au diagramme de Young de λ . Par exemple, il y a 3 chemins liant le diagramme vide au diagramme de la partition $(3,1)$. La dimension du module simple $V^{(3,1)}$ est donc égal à 3.

Ce graphe comporte en fait beaucoup plus d'informations sur la théorie des représentations du groupe symétrique : il permet de déterminer la *règle de branchement*. Le groupe symétrique \mathfrak{S}_n a ceci de particulier qu'il s'injecte dans \mathfrak{S}_{n+1} . Or, un procédé naturel permet d'associer à chaque représentation d'un sous-groupe, une représentation du groupe en entier : c'est la représentation induite. Au niveau des modules et dans le cas de ceux qui nous intéressent ici, on peut donc associer à chaque $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ -module

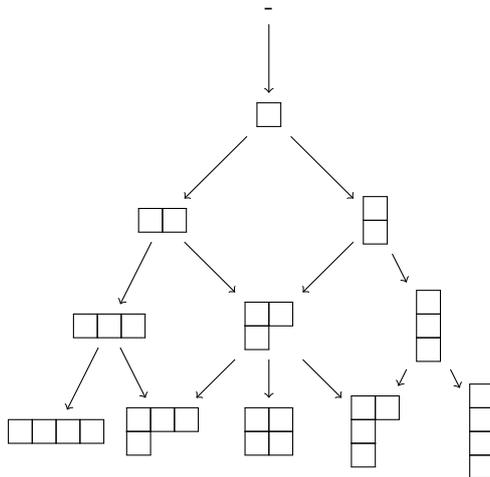


FIGURE 1. Le début du graphe de Young.

simple V^λ un nouveau module, cette fois sur l'algèbre du groupe $\mathbb{C}\mathfrak{S}_{n+1}$, qui s'écrit explicitement de la manière suivante : $\mathbb{C}\mathfrak{S}_{n+1} \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} V^\lambda$. On le note $\text{Ind}(V^\lambda)$. En général, ce module n'est pas simple, il ne peut donc pas s'écrire sous la forme d'un V^μ , mais la théorie des représentations complexes étant semi-simple, ceci impose que tout module peut se décomposer sous la forme d'une somme directe de sous-modules simples. Ce module peut donc a priori s'écrire comme une somme directe de V^μ où μ parcourt un certain sous-ensemble de l'ensemble des partitions de $n + 1$. Le problème de branchement consiste à répondre à la question suivante : Quel est ce sous-ensemble de partitions ? il se trouve que c'est le graphe de Young qui permet de répondre de façon satisfaisante à ce problème. Prenons $\lambda \vdash n$ alors on note $\lambda \rightarrow \mu$ si une flèche relie λ à la partition μ de $n + 1$. Alors on a :

$$\text{Ind}(V^\lambda) = \bigoplus_{\lambda \rightarrow \mu} V^\mu.$$

Toutes les remarques ci-dessus montrent que la théorie des représentations du groupe symétrique sur le corps des nombres complexes est relativement bien comprise. Par contraste, l'étude de la théorie des représentations de ce même groupe sur un corps de caractéristique $p > 0$ l'est beaucoup moins. Par exemple, un problème naturel comme celui de savoir quelles sont les dimensions des modules simples dans ce cas n'admet pas de réponse en général. Pire, une célèbre conjecture (la conjecture de James) qui était sensé donner des informations sur cette théorie a été récemment infirmée par des résultats de Williamson [33]. Cependant, certains résultats sont disponibles : par exemple, on sait obtenir une classification des modules simples et un analogue à la règle de branchement est aussi possible. Ces résultats, obtenus dans les années 80, font en fait intervenir un objet combinatoire, plus complexe que le graphe de Young, qui se définit initialement en théorie des représentations des groupes quantiques : le *cristal d'un espace de Fock*. Depuis une trentaine d'années, de nombreux liens se sont tissés entre cette théorie et celle du groupe symétrique, ou plus généralement des groupes de réflexions. Dans cette note, nous essaierons d'expliquer certains de ces liens, en particulier, comment ce cristal intervient en théorie des représentations de certaines algèbres associées au groupe symétrique et à ces généralisations. La prochaine section considère le problème du calcul de la règle de branchement pour le groupe symétrique en caractéristique positive. La suivante explore des problèmes analogues concernant deux types d'algèbres importantes qui apparaissent naturellement dans un grand nombre de problèmes algébriques, géométriques ou combinatoires : les algèbres de Hecke et les algèbres de Cherednik rationnelles.

Remerciements : L'auteur remercie Maria Chlouveraki pour une relecture attentive de cet article ainsi que pour ses nombreuses corrections et commentaires.

2. Représentations modulaires du groupe symétrique

Dans cette section, nous étudions la théorie des représentations du groupe symétrique sur un corps de caractéristique non nul. Le but est de donner une définition de règle de branchement dans ce cadre et de montrer que celle-ci peut se déterminer de façon assez élémentaire en construisant un nouveau graphe : le cristal d'un espace de Fock.

2.1. Modules de Specht. — Soit $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et soit F un corps quelconque. Dans [32], pour chaque partition λ de n , Specht a défini un $F\mathfrak{S}_n$ -module S^λ appelé “module de Specht”. La construction de ces modules est explicite et l'avantage de cette construction est sa validité sur tout corps. Elle se fait grâce à des outils combinatoires et nous nous référons au livre de James-Kerber [21, Ch. 7] pour les détails de sa construction. Les dimensions de ces modules peuvent se calculer exactement comme dans l'introduction (avec le module V^λ).

Exemple 2.1. — Si $n \geq 1$, l'ensemble des modules de Specht contient deux modules de dimension 1, c'est le cas de la partition $\lambda = (n)$ et le cas de la partition $\lambda = \underbrace{(1, \dots, 1)}_{n \text{ fois}}$.

1. Le module de Specht indexé par la partition (n) correspond au module trivial, comme F -espace vectoriel, il est donc isomorphe à F et \mathfrak{S}_n agit trivialement sur celui-ci.
2. Le module de Specht indexé par la partition $\underbrace{(1, \dots, 1)}_{n \text{ fois}}$ correspond au module signe (c'est à dire que

la représentation est le morphisme signe), comme F -espace vectoriel, il est donc isomorphe à F .

Ces deux modules sont non isomorphes excepté dans le cas $p = 2$.

Le résultat suivant indique que ces modules de Specht fournissent des modèles pour les modules simples dans le cas de la caractéristique 0 (voir [21, Th 7.1.9]).

Théorème 2.2. — *Supposons $F = \mathbb{Q}$ alors les modules de Specht sont deux à deux non isomorphes et on a :*

$$\text{Irr}(\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n) = \{S^\lambda \mid \lambda \vdash n\}.$$

Remarque 2.3. — Le théorème ci-dessus reste valable sur un corps de caractéristique nul. Il l'est aussi lorsque F est de caractéristique p ne divisant pas n . Dans ce cas, la théorie des représentations du groupe est semi-simple (c'est le théorème de Maschke.)

On dispose donc d'une classification des modules simples en caractéristique nulle (et, comme expliqué dans l'introduction, on connaît les dimensions de ces modules.) Que se passe-t-il maintenant pour un corps de caractéristique positive ? les modules de Specht ci-dessus sont toujours bien définis mais ils ne sont pas simples en général, on peut cependant s'en servir avantageusement pour déterminer un ensemble de module simples. Si les modules de Specht ne sont pas simples, ils admettent une suite de composition, c'est à dire qu'il existe une suite de sous-modules :

$$0 \subset M_1 \subset M_2 \dots \subset M_k \subset S^\lambda,$$

où tous les quotients successifs sont des modules simples. Ces modules simples sont appelés *facteurs de composition*. Une telle suite n'est pas unique en général mais les facteurs de composition et leurs multiplicités (c'est à dire le nombre de fois qu'un module simple apparaît comme quotient dans une telle suite) le sont (c'est le théorème de Jordan-Hölder). Pour les modules de Specht, on peut montrer que chacun des modules simples se trouve comme facteur de composition dans un module de Specht. On a même un résultat beaucoup plus précis qui permet de donner une classification des modules simples. Pour ceci, nous allons tout d'abord définir un sous-ensemble de l'ensemble des partitions.

Définition 2.4. — Soit $e \in \mathbb{Z}_{>1}$. Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ une partition de n . On dit que λ est une partition e -régulière si il n'existe aucun entier $i \in \mathbb{N}$ vérifiant :

$$\lambda_i = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{i+e-1}.$$

On note $\text{Reg}_e(n)$ l'ensemble des partitions de n qui sont e -régulières.

Le cas qui va nous intéresser ici est le cas où $e = p$ est premier mais, plus tard, ces partitions interviendront dans le cas général $e \in \mathbb{Z}_{>1}$.

Exemple 2.5. — L'ensemble des partitions 2-régulières de $n = 1$ à 5 est :

$$\{\emptyset, (1), (2), (3), (2, 1), (4), (3, 1), (5), (4, 1), (3, 2)\}$$

L'ensemble des partitions 3-régulières de $n = 1$ à 6 est :

$$\{\emptyset, (1), (2), (1, 1), (3), (2, 1), (4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1), (5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1)\}$$

La classification des modules simples est donc donnée grâce au théorème suivant (voir [21, Th 7.1.14]), théorème qui utilise un ordre partiel fondamental sur l'ensemble des partitions d'un même entier : *l'ordre de dominance*. Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \vdash n$ et $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_s) \vdash n$. On peut supposer que $r = s$, quitte à rajouter suffisamment de 0 à une des deux partitions. Alors on note $\lambda \trianglelefteq \mu$ si pour tout $i = 1, \dots, r$, on a :

$$\sum_{1 \leq j \leq i} \lambda_j \leq \sum_{1 \leq j \leq i} \mu_j.$$

On obtient :

Théorème 2.6 (James). — Soit M un $F\mathfrak{S}_n$ -module simple où F est un corps de caractéristique $p > 0$. Alors il existe une unique partition $\lambda_M \vdash n$ qui est p -régulière et vérifiant :

1. M est un facteur de composition de S^{λ_M} et sa multiplicité est de 1,
2. Si $\lambda \vdash n$ est telle que M est un facteur de composition de S^λ alors $\lambda_M \trianglerighteq \lambda$.

L'application suivante est bijective:

$$\begin{aligned} \Psi : \text{Irr}(F\mathfrak{S}_n) &\rightarrow \text{Reg}_p(n) \\ M &\mapsto \lambda_M. \end{aligned}$$

Il suit donc que les modules simples s'indexent naturellement par l'ensemble des partitions p -régulières. Dans la suite, on va noter pour tout $M \in \text{Irr}(F\mathfrak{S}_n)$, $D^{\lambda_M} := \Psi^{-1}(\lambda_M) = M$. De sorte que

$$\text{Irr}(F\mathfrak{S}_n) = \{D^\mu \mid \mu \in \text{Reg}_p(n)\}.$$

Cette description est beaucoup moins explicite que le cas de la caractéristique 0. Par exemple, reprenons l'exemple 2.1 où nous avons deux modules de Specht de dimension 1 représentant la représentation signe et la représentation triviale. Etant donnée la dimension de ces deux modules, ils sont nécessairement simples et apparaissent donc dans la classification ci-dessus. Autrement dit, il existe $\lambda_0 \in \text{Reg}_p(n)$ tel que D^{λ_0} est associé à la représentation triviale et $\lambda_1 \in \text{Reg}_p(n)$ tel que D^{λ_1} est associé à la représentation signe.

Il est facile de voir que $\lambda_0 = (n)$ dans la classification (notons que (n) est bien une partition p -régulière.) Mais si $p < n$, la partition $\underbrace{(1, \dots, 1)}_{n \text{ fois}}$ n'est jamais p -régulière, on ne peut donc avoir $\lambda_1 = \underbrace{(1, \dots, 1)}_{n \text{ fois}}$.

Déterminer cette partition n'est pas aisé et peut être vue comme un cas particulier du problème dit de Mullineux (voir la remarque 2.7 ci-dessous). On la trouve par exemple dans [27, 6.43 (iii)]. Pour ceci, on écrit la division euclidienne de n par $(p-1)$, on a $n = (p-1)q + r$ avec $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $0 \leq r \leq p-2$. Alors $\lambda^1 = \underbrace{(q+1, \dots, q+1)}_{r \text{ fois}}, \underbrace{(q, \dots, q)}_{p-r-1 \text{ fois}}$

Remarque 2.7. — Le problème de Mullineux est le suivant. Soit λ une partition de n . Sur \mathbb{Q} , on a déjà vu que le module de Specht associé S^λ est simple. La représentation associée $\rho : \mathfrak{S}_n \rightarrow \text{GL}_k(\mathbb{Q})$ est irréductible (k étant la dimension du module). On peut alors considérer la représentation $\rho' : \mathfrak{S}_n \rightarrow \text{GL}_m(\mathbb{Q})$ tel que $\rho'(\sigma) = \varepsilon(\sigma)\rho(\sigma)$ où ε est le signe et σ un élément arbitraire de \mathfrak{S}_n . Il est facile de voir que la représentation étant irréductible, elle est associée à un module de Specht $S^{\iota(\lambda)}$ où $\iota(\lambda)$ est une partition de n . Mais laquelle ? on peut en fait facilement montrer que celle-ci correspond à la conjugué de λ , c'est à dire l'unique partition de n dont le diagramme de Young est le diagramme de Young de λ que l'on a symétrisé par rapport à la diagonale. Par exemple, le conjugué de (n) est $\underbrace{(1, \dots, 1)}_{n \text{ fois}}$ (ce qui est consistant avec le résultat). Moins trivialement, le conjugué de $(4, 3, 1)$ par exemple est $(3, 2, 2, 2, 1)$. Remarquons qu'un module de Specht indexé par une partition a la même dimension que celui indexé par sa conjuguée.

Mais ce problème se pose aussi dans le cas de la caractéristique positive ! concrètement, donnons-nous une partition p -régulière et le module simple associé D^λ . Le même procédé que ci-dessus donne l'existence

d'un nouveau module simple $D^{m(\lambda)}$ où $m(\lambda)$ est une partition p -régulière. En 1979, Mullineux a donné une forme conjecturale de cette partition. La conjecture de Mullineux a été prouvée bien plus tard par Kleshchev [24] et Ford et Kleshchev [9]. On sait en fait que ce problème a une réponse particulièrement élégante en terme de cristal de l'espace de Fock de niveau 1 (voir la remarque 2.14 ci-dessous).

2.2. Règle de branchement modulaire. — On s'intéresse maintenant aux procédés d'induction de $F\mathfrak{S}_n$ à $F\mathfrak{S}_{n+1}$. Dans le cas où F est le corps des nombres complexes, on cherche donc simplement à comprendre l'induction d'un module simple de $F\mathfrak{S}_n$ à $F\mathfrak{S}_{n+1}$. Dans le cas général, on ne peut espérer une réponse aussi satisfaisante que celle donnée dans l'introduction car la théorie des représentations n'est pas semi-simple. Ceci signifie en particulier que l'induction d'un module simple n'est pas semi-simple : elle ne peut en général pas s'écrire comme somme directe de sous-modules simples. On s'intéresse plutôt ici à décrire le socle de l'induction d'un module simple, c'est à dire le plus grand sous-module semi-simple contenu dans cette induction. Par définition, il s'écrit donc comme somme directe de modules simples de $F\mathfrak{S}_{n+1}$. On en revient donc à définir un graphe qui contient les informations ci-dessus.

Définition 2.8. — Le graphe de branchement de $(F\mathfrak{S}_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ est le graphe avec

- Sommets : l'ensemble des partitions p -régulières $\text{Reg}_p(n)$ de n pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$
- Flèches : on a $\lambda \rightarrow \mu$ pour $(\lambda, \mu) \in \text{Reg}_p(n) \times \text{Reg}_p(n+1)$ si et seulement si D^μ est un facteur direct de $\text{Soc}(\text{Ind}(D^\lambda))$.

Par convention D^\emptyset est l'unique module simple de $F\mathfrak{S}_0$ et $\text{Ind}(D^\emptyset) = D^{(1)}$

Exemple 2.9. — Si on prend un nombre premier p tel que $p > n$ alors, comme déjà noté dans la remarque 2.3, la théorie des représentations de $F\mathfrak{S}_n$ est semi-simple, le socle correspond donc au module lui-même et tous les modules de Specht sont simples et non isomorphes. Le graphe de branchement n'est rien d'autre que le graphe de Young de l'introduction.

Le problème de la détermination explicite de la règle de branchement a été résolu par Kleshchev ([22, 23]) et fait intervenir, pour la première fois dans cette note, un cristal d'espace de Fock. Passons donc à la définition de cet objet. Pour ceci, nous avons besoin de quelques définitions combinatoires associées aux diagrammes de Young.

Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ une partition de n . Une cellule du diagramme de Young de λ est repérée par son numéro de ligne et son numéro de colonne si bien que le diagramme de Young peut formellement se définir par l'ensemble :

$$\mathcal{Y}(\lambda) = \{(a, b) \mid 1 \leq a \leq r, 1 \leq b \leq \lambda_a\}.$$

Le résidu de la cellule (a, b) est par définition $b - a + p\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$. On dit qu'une cellule du diagramme de Young est *supprimable* si le fait de la supprimer donne toujours le diagramme de Young d'une partition. Un élément $(a, b) \in \mathbb{Z}_{>0}^2$ est appelé une cellule *ajoutable*, si $\mathcal{Y}(\lambda) \sqcup \{(a, b)\}$ est le diagramme de Young d'une partition de $n + 1$.

Si nous reprenons l'exemple de l'introduction avec la partition (4.3.1) de 8, on voit que la cellule $(2, 3)$ est une cellule supprimable et son résidu est $-1 + p\mathbb{Z}$. On voit par exemple également que $(2, 4)$ est une cellule ajoutable de résidu $-2 + p\mathbb{Z}$. Fixons maintenant $j \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$. On considère l'ensemble X des cellules ajoutables et supprimables de résidu j associée à λ . Ensuite, on considère tous les éléments de X et on les écrit sous la forme d'une suite :

$$((a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_m, b_m))$$

où $a_1 > a_2 > \dots > a_m$ (on voit facilement que les a_i ne peuvent être égaux) et on construit un mot en écrivant dans l'ordre de la suite S_j si (a_j, b_j) est supprimable et A_j si (a_j, b_j) est ajoutable. On supprime dans ce mot toutes les occurrences consécutives de type $S_i A_j$, de façon inductive, de manière à ne plus avoir de telles occurrences dans notre mot. Alors soit le mot obtenu n'admet aucune lettre de type A et on note dans ce cas $\tilde{f}_j \lambda = 0$; Sinon notre mot s'écrit sous la forme:

$$A_{i_1} \dots A_{i_k} S_{i_{k+1}} \dots S_{i_r}$$

avec donc $i_1 < \dots < i_r$ (et éventuellement aucune lettre de type S .) On considère la partition μ tel que

$$\mathcal{Y}(\mu) = \mathcal{Y}(\lambda) \sqcup \{(a_{i_k}, b_{i_k})\}$$

On définit alors $\tilde{f}_j \lambda = \mu$. L'opérateur \tilde{f}_j est appelé *opérateur de Kashiwara*. Il est facile de voir qu'étant donné une partition, il existe toujours au moins un $j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que $\tilde{f}_j \lambda$ est non nul.

Exemple 2.10. — Prenons notre exemple avec la partition $(4, 3)$ de 7 et choisissons $p = 3$. On écrit le diagramme de Young et le résidu de chaque cellule dans la boîte du tableau associé :

0	1	2	0
2	0	1	

(par abus de langage nous notons x pour $x + p\mathbb{Z}$. Les cellules ajoutables et supprimables de résidu $1 + 3\mathbb{Z}$ sont donc $(1, 5)$ qui est ajoutable, $(2, 3)$ qui est supprimable et $(3, 1)$ qui est ajoutable. La suite ci-dessus s'écrit : $(3, 1), (2, 3), (1, 5)$ et le mot $A_1 S_2 A_3$. Si on supprime l'occurrence $S_2 A_3$, il ne reste qu'un terme de type A qui correspond à la boîte ajoutable $(3, 1)$. On voit que :

$$\mathcal{Y}(4, 3, 1) = \mathcal{Y}(4, 3) \sqcup \{(3, 1)\}$$

et on conclut donc $\tilde{f}_1(4, 3) = (4, 3, 1)$

Définition 2.11. — Le cristal de l'espace de Fock de niveau 1 associé au nombre premier $p > 0$ est le graphe avec

- Sommets : l'ensemble des partitions de n pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$
- Flèches : on a $\lambda \rightarrow \mu$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ avec $\lambda \vdash n$, $\mu \vdash n + 1$ et $j \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ tel que $\tilde{f}_j \lambda = \mu$.

En fait, chaque flèche du graphe ci-dessus vient avec la donnée d'un élément de $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ indexant l'opérateur de Kashiwara associé. Nous omettons cette donnée dont nous n'avons pas besoin dans ce survol.

Le cristal est à l'origine un objet apparaissant dans en théorie des représentations des algèbres de Lie semi-simples et des groupes quantiques et donc de façon a priori complètement indépendante des problèmes que nous exposons ici. On peut l'associer à certains modules sur ces algèbres et il permet de décrire des propriétés importantes de ceux-ci. Dans cet article, la propriété qui nous intéresse est la suivante :

Théorème 2.12 (Kleshchev). — *Le graphe de branchement de $(F\mathfrak{S}_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ correspond à la composante connexe du cristal de l'espace de Fock contenant la partition vide.*

Le calcul explicite de la règle de branchement n'a pas été à l'origine décrite à l'aide de ce cristal. Ce sont Lascoux, Leclerc et Thibon [25] qui ont pour la première fois remarqué que cette règle pouvait se traduire de cette manière. De là, de nombreux autres liens se sont tissés entre la théorie des représentations des groupes de réflexions et celles des cristaux et groupes quantiques. Pour plus de détails, on peut se référer aux ouvrages [1, 10].

Exemple 2.13. — La figure 2 montre le début du cristal de l'espace de Fock de niveau 1 lorsque $p = 3$. On voit donc par exemple que

$$\text{Soc}(\text{Ind}(D^{(2,1)})) = D^{(2,1,1)} \oplus D^{(2,2)}$$

Remarque 2.14. — Comme indiquée dans la remarque 2.7, le problème de Mullineux admet une solution en terme du graphe ci-dessus. Pour ceci, il faut prendre en compte les flèches dans ce graphe mais aussi les éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ indexant les opérateurs de Kashiwara. Si λ est p -régulière, il existe, une suite d'éléments (i_1, \dots, i_n) de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que $\lambda = \tilde{f}_{i_1} \dots \tilde{f}_{i_n} \emptyset$. Alors, la partition $m(\lambda)$ est la partition p -régulière de n suivante $m(\lambda) = \tilde{f}_{-i_1} \dots \tilde{f}_{-i_n} \emptyset$ que l'on peut montrer bien définie. Par exemple Prenons $p = 3$, on voit que $m(4) = (2, 2)$ ce qui est cohérent avec la fin de la section précédente.

3. Représentations modulaires des algèbres de Hecke

On voit que la définition du cristal d'un espace de Fock a un sens lorsque p n'est pas nécessairement un nombre premier. Existe t-il un groupe ou une algèbre qui joue le rôle du groupe symétrique pour ce cristal ?

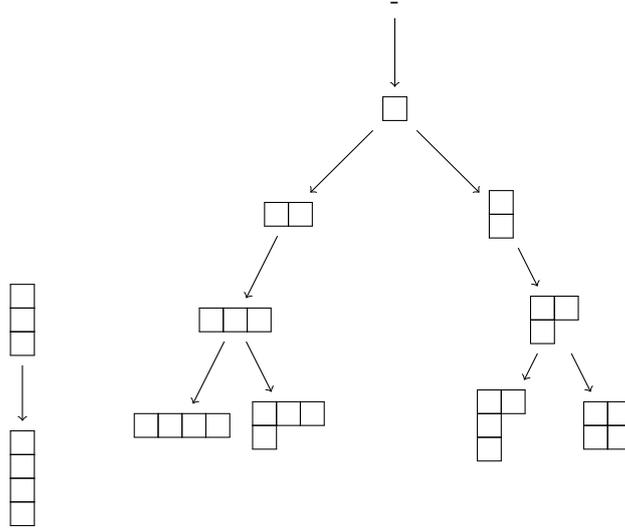


FIGURE 2. Le début du cristal de niveau 1 lorsque $p = 3$.

3.1. Définition et théorie des représentations. — Tout d'abord, nous allons considérer une généralisation du groupe symétrique. Le groupe symétrique est un cas particulier de groupe de réflexions complexes. Prenons V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie. Une réflexion f de V est par définition un isomorphisme linéaire de V , diagonalisable telle que le noyau de $f - \text{Id}_V$ est un hyperplan de V . Un groupe de réflexions complexes est un groupe fini engendré par des réflexions complexes.

Il existe une classification des groupes de réflexions complexes irréductibles (ceux dont l'espace vectoriel sous-jacent V n'a pas de sous-espace vectoriel non trivial invariant par l'ensemble des réflexions du groupe) par Shephard et Todd en 1954 dans [31]. Elle consiste en :

1. Une série infini dépendant de trois paramètres entiers $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ et $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ avec r qui divise l . Elle est notée $G(l, r, n)$. En tant que groupe, $G(l, r, n)$ est isomorphe au sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices monomiales où les coefficients non nuls sont des racines l èmes de l'unité et le produit de ceux-ci une racine l/r ième de l'unité.
2. 34 groupes, dits exceptionnels, qui ne rentrent pas dans la catégorie ci-dessus.

L'objet qui va nous intéresser ici est le groupe de réflexions de type $G(l, 1, n)$ aussi appelé groupe symétrique généralisé. C'est un objet fondamental car tout groupe de la série infini se retrouve comme sous-groupe d'un groupe de ce type. De plus, une grande partie de la théorie des représentations de toute cette série infini se déduit de l'étude seule de la théorie des représentations de ce groupe grâce à des techniques de théories des groupes (comme la théorie de Clifford). Lorsque $l = 1$ ou 2 , ce groupe est aussi un groupe de Weyl (un groupe de réflexion réel) : Le groupe $G(1, 1, n)$ n'est rien d'autre que le groupe symétrique, le groupe $G(2, 1, n)$ est aussi connu sous le nom de groupe hyperoctaédral, ou groupe de Weyl de type B_n .

On se place ici sur le corps des nombres complexes. On peut définir l'algèbre $\mathbb{C}G(l, 1, n)$ du groupe $G(l, 1, n)$ par sa présentation. Celle-ci est donnée par :

- générateurs: T_0, T_1, \dots, T_{n-1} ,
- relations:

$$\begin{aligned}
 T_0 T_1 T_0 T_1 &= T_1 T_0 T_1 T_0, \\
 T_i T_{i+1} T_i &= T_{i+1} T_i T_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-2), \\
 T_i T_j &= T_j T_i \quad (|j - i| > 1), \\
 T_0^l - 1 &= 0, \\
 T_i^2 - 1 &= 0 \quad (i = 1, \dots, n-1).
 \end{aligned}$$

Ceci signifie que tout élément de cette algèbre est une somme de produits des éléments T_0, T_1, \dots, T_{n-1} et que la multiplication entre deux de ces éléments est déterminée par les relations ci-dessus. Plus

formellement, pour toute \mathbb{C} -algèbre H , et pour toute application $f : \{T_0, \dots, T_{n-1}\} \rightarrow H$, il existe un unique morphisme d'algèbres $F : \mathbb{C}G(l, 1, n) \rightarrow H$ prolongeant f et tel que les images des générateurs satisfont les relations ci-dessus.

Si $l = 1$, T_0 est alors égal à 1 et l'algèbre n'est engendrée que par T_1, \dots, T_{n-1} . On voit bien alors que l'algèbre obtenue n'est rien autre que l'algèbre du groupe symétrique sur le corps des nombres complexes, où pour $k = 1, \dots, n-1$, l'élément T_k correspond à la transposition $(k, k+1)$. Dans le cadre général, on peut associer à ce groupe une nouvelle algèbre obtenue en "déformant" la multiplication et plus particulièrement les deux dernières relations de sa présentation.

Pour ceci, fixons nous un élément $q \in \mathbb{C}^\times$ et $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_l) \in \mathbb{Z}^l$. On se place ici sur le corps des nombres complexes. L'algèbre de Hecke du groupe $G(l, 1, n)$ est une \mathbb{C} -algèbre avec une présentation par :

- générateurs: T_0, T_1, \dots, T_{n-1} ,
- relations:

$$\begin{aligned} T_0 T_1 T_0 T_1 &= T_1 T_0 T_1 T_0, \\ T_i T_{i+1} T_i &= T_{i+1} T_i T_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-2), \\ T_i T_j &= T_j T_i \quad (|j - i| > 1), \\ (T_0 - q^{s_1}) \dots (T_0 - q^{s_l}) &= 0, \\ (T_i - q)(T_i + 1) &= 0 \quad (i = 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Nous la noterons $\mathcal{CH}_s(q)$. Prenons $l = 1$, l'algèbre obtenue est appelée algèbre de Hecke de type A . On voit que si on fixe encore $q = 1$, on obtient encore une fois l'algèbre du groupe symétrique sur le corps des nombres complexes. Cette algèbre joue un rôle important dans diverses théories (voir [10, 11] pour des détails), citons par exemple :

- La théorie des représentations des groupes réductifs finis.
- La théorie des noeuds : cette algèbre permet de définir un invariant de noeud, le polynôme HOM-FLYPT.
- La théorie des groupes quantiques et des bases canoniques, etc.

Des rôles analogues sont parfois joués par ces algèbres ou par certaines de ces avatars dans le cas plus général où $l \in \mathbb{Z}_{>0}$. Dans certains cas, ces rôles demeurent mystérieux mais font l'objet de récents travaux [4].

Outre les références ci-dessus, on peut citer [1] pour une étude approfondie de la théorie des représentations de cette algèbre. La théorie des représentations de $\mathcal{CH}_s(q)$ possède de grandes similarités avec celle du groupe symétrique. Ici, les objets combinatoires qui vont nous intéresser ne sont pas simplement les partitions mais les l -partitions. Une l -partition de n est par définition un l -uplet $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^1, \dots, \lambda^l)$ où pour chaque $j = 1, \dots, l$, on a $\lambda^j \vdash n_j$ avec $(n_1, \dots, n_l) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^l$ vérifiant $\sum_{1 \leq j \leq l} n_j = n$. On notera $\boldsymbol{\lambda} \vdash_l n$. Par convention, une 1-partition est identifiée à une partition.

Tout d'abord, on peut construire un ensemble de $\mathcal{CH}_s(q)$ -modules appelé modules de Specht et indexé par les l -partitions de n .

$$\{S^\lambda \mid \boldsymbol{\lambda} \vdash_l n\}.$$

Ces modules ne sont pas simple en général. Ils le sont lorsque l'algèbre est semi-simple (on dispose d'un critère relativement simple pour savoir quand elle l'est [10, Th. 5.4.2] du à Ariki). On peut ensuite adopter la même stratégie que pour le groupe symétrique pour trouver les modules simples. Cependant, le résultat va être un peu plus compliqué et nous allons avoir besoin de la théorie des cristaux d'espace de Fock dès cette étape pour définir les objets en présence.

3.2. Cristaux. — On se fixe ici $e \in \mathbb{Z}_{>1}$ et $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_l) \in \mathbb{Z}^l$. Soit $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^1, \dots, \lambda^l)$ une l -partition de n . On définit le *diagramme de Young* de $\boldsymbol{\lambda}$ comme l'ensemble

$$\mathcal{Y}(\boldsymbol{\lambda}) = \{(a, b, c) \mid 1 \leq a, 1 \leq b \leq \lambda_a^c, 1 \leq c \leq l\}.$$

Comme dans le cas $l = 1$, ses éléments sont appelés les *cellules* de $\boldsymbol{\lambda}$. Ce diagramme se représente de façon identique au cas $l = 1$. Par exemple, le diagramme de Young de la 3-partition $((3, 1), (2), (1, 1))$ de 8 se représente sous la forme :

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right)$$

Le résidu de la cellule $(a, b, c) \in \mathcal{Y}(\lambda)$ est par définition $b - a + s_c + e\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$. On dit qu'une cellule du diagramme de Young est *supprimable* si le fait de la supprimer du diagramme de Young donne toujours le diagramme de Young d'une l -partition. Un élément $(a, b, c) \in \mathbb{Z}_{>0}^2$ est appelé une cellule *ajoutable*, si $\mathcal{Y}(\lambda) \sqcup \{(a, b, c)\}$ est le diagramme de Young d'une l -partition de $n + 1$.

Fixons maintenant $j \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$. On considère l'ensemble X des cellules ajoutables et supprimables de résidu j associé à λ et nous allons considérer un ordre sur ces éléments, on écrit $(a, b, c) < (a', b', c')$ si

- $b - a + s_c < b' - a' + s_{c'}$,
- ou bien $b - a + s_c = b' - a' + s_{c'}$ et $c' < c$.

Ensuite, on considère tous les éléments de X et on les écrit sous la forme d'une suite

$$((a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \dots, (a_m, b_m, c_m))$$

dans l'ordre croissant suivant l'ordre ci-dessus. On construit un mot en écrivant dans l'ordre de la suite S_j si (a_j, b_j, c_j) est supprimable et A_j si (a_j, b_j, c_j) est ajoutable. On supprime dans ce mot toutes les occurrences consécutives de type $S_i A_j$, de façon inductive, de manière à ne plus avoir de telles occurrences dans notre mot. Alors soit le mot obtenu n'admet aucune lettre de type A et on note dans ce cas $\tilde{f}_j \lambda = 0$. Sinon notre mot s'écrit sous la forme:

$$A_{i_1} \dots A_{i_k} S_{i_{k+1}} \dots S_{i_r}$$

avec donc $i_1 < \dots < i_r$. On considère la partition μ tel que

$$\mathcal{Y}(\mu) = \mathcal{Y}(\lambda) \sqcup \{(a_{i_k}, b_{i_k}, c_{i_k})\}$$

On définit alors $\tilde{f}_j \lambda = \mu$.

Définition 3.1. — Le cristal de l'espace de Fock de niveau l et de charge s associé à $e \in \mathbb{Z}_{>1}$ est le graphe avec :

- Sommets : l'ensemble des l -partitions de n pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$
- Flèches : on a $\lambda \rightarrow \mu$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ avec $\lambda \vdash_l n$, $\mu \vdash_l n + 1$ et il existe $j \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ tel que $\tilde{f}_j \lambda = \mu$.

Comme pour le niveau 1, il est facile de voir que de toute l -partition part au moins une flèche. La structure de ce graphe peut être relativement complexe. Il possède plusieurs composantes connexes dont une va jouer un rôle important par la suite : celle contenant la multipartition vide.

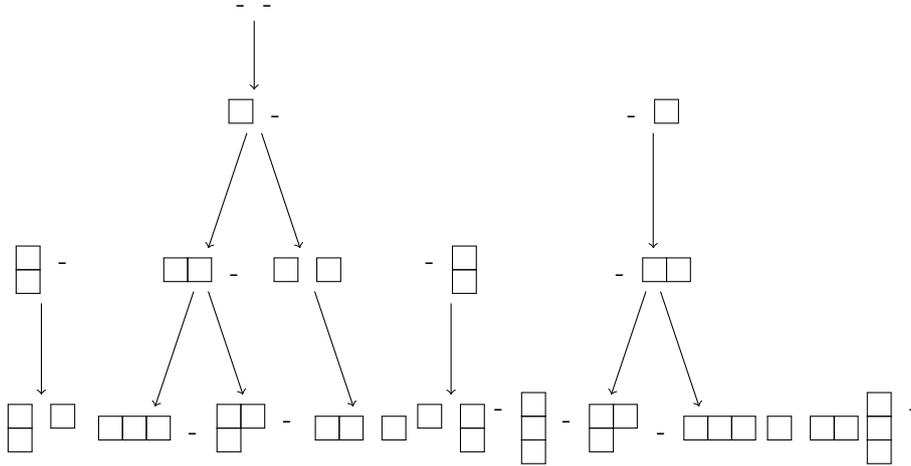


FIGURE 3. Le début du cristal en niveau 2, $s = (0, 0)$ et $e = 2$

Définition 3.2. — Soit $e \in \mathbb{Z}_{>1}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $s \in \mathbb{Z}^l$. Les l -partitions de n apparaissant dans la composante connexe de la l -partition vide du cristal correspondant sont appelées *multipartitions de Uglov*. L'ensemble des multipartitions de Uglov associé à ces données est noté $\Phi_s^e(n)$.

Suivant la section précédente, le multipartitions de Uglov dans le cas $l = 1$ correspondent aux partitions e -régulières que nous avons déjà rencontrées dans la première section (voir la définition 2.4).

Exemple 3.3. — La figure 3 donne le cristal en niveau 2, $\mathbf{s} = (0, 0)$ et $e = 2$ (le symbole - indique le diagramme de Young de la partition vide.) On voit dans l'exemple du $\widehat{\mathfrak{sl}}_e$ -cristal en niveau 2, $\mathbf{s} = (0, 0)$ et $e = 2$ que l'on a donc :

$$\Phi_{(0,0)}^2(3) = \{((3), \emptyset), ((2, 1), \emptyset), ((2), (1))\}.$$

Remarquons en particulier que cet ensemble ne correspond pas aux bipartitions dont chaque composante est 2-régulière.

Si \mathbf{s} change, l'ensemble des l -partitions de Uglov change également. Par exemple :

$$\Phi_{(0,4)}^2(3) = \{(\emptyset, (3)), (\emptyset, (2, 1)), ((1), (2))\}.$$

Remarque 3.4. — Lorsque $l = 1$ et $e = p$ est premier, le graphe de branchement de l'algèbre de Hecke est donc exactement le même que celui du groupe symétrique en caractéristique p . Ce n'est pas un hasard, les théories des représentations de ces deux objets sont en interactions (voir par exemple [27, Ch.6 Sec. 2]). C'est même une des motivations pour l'étude des représentations d'algèbres de Hecke.

3.3. Modules simples et règle de branchement. — Les questions qui vont nous intéresser dans cette partie sont analogues à celles posées pour le groupe symétrique. Nous supposons dans toute la suite que q est une racine primitive de l'unité d'ordre $e > 1$. La première question est celle de savoir comment déterminer les modules simples de notre nouvelle algèbre. Pour ceci, nous allons procéder avec la même stratégie que pour le groupe symétrique, en considérant tout d'abord un ordre sur les l -partitions qui va dépendre des données de départ. Cet ordre $\prec_{\mathbf{s}}$ est défini dans [10, Def. 5.5.19] en terme de symbole de Lusztig. Il n'est pas utile de donner sa définition dans ce survol. Il est important cependant de constater que cet ordre dépend fortement du choix de \mathbf{s} . Le théorème suivant se trouve dans [10, Th 6.7.2] C'est une combinaison de plusieurs résultats.

Théorème 3.5 (Ariki, Ariki-Mathas, Geck-Jacon). — Soit M un $\mathcal{CH}_{\mathbf{s}}(q)$ -module simple où q est une racine primitive de l'unité d'ordre $e > 1$. Alors il existe une unique l -partition $\lambda \vdash n$ qui est dans $\Phi_{\mathbf{s}}^e(n)$ et qui vérifie :

1. M est un facteur de composition de S^{λ_M} et sa multiplicité est de 1,
2. Si M est un facteur de composition de S^{λ_M} alors $\lambda \prec_{\mathbf{s}} \lambda_M$.

L'application suivante bijective:

$$\begin{array}{ccc} \Psi : \text{Irr}(F\mathfrak{S}_n) & \rightarrow & \Phi_{\mathbf{s}}^e(n) \\ M & \mapsto & \lambda_M \end{array}$$

Il suit que les modules simples s'indexent naturellement par l'ensemble des l -partitions de Uglov. Dans la suite, on va noter pour tout $M \in \text{Irr}(\mathcal{CH}_{\mathbf{s}}(q))$, $D_{\mathbf{s}}^{\lambda_M} := \Psi^{-1}(\lambda_M) = M$. De sorte que

$$\text{Irr}(\mathcal{CH}_{\mathbf{s}}(q)) = \{D_{\mathbf{s}}^{\mu} \mid \mu \in \Phi_{\mathbf{s}}^e(n)\}$$

Si nous avons déjà remarqué que la description des modules simples dans le cas du groupe symétrique et de la caractéristique positive n'était pas explicite, celle-ci, dans un certain sens, l'est encore moins car l'ensemble des multipartitions de Uglov est un ensemble plus complexe a priori que l'ensemble des partitions p -régulières. En particulier, en général, il n'existe pas de définition non récursive de celles-ci, même si des descriptions relativement agréables existent (voir [10, §5.7] et [18]). On peut maintenant définir un graphe de branchement de manière abstraite :

Définition 3.6. — Le graphe de branchement de $(\mathcal{CH}_{\mathbf{s}}(q))_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ est le graphe avec

- Sommets : l'ensemble des l -partitions $\Phi_{\mathbf{s}}^e(n)$ de Uglov de n pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$
- Flèches : on a $\lambda \rightarrow \mu$ pour $(\lambda, \mu) \in \Phi_{\mathbf{s}}^e(n) \times \Phi_{\mathbf{s}}^e(n+1)$ si et seulement si $D_{\mathbf{s}}^{\mu}$ est un facteur direct de $\text{Soc}(\text{Ind}(D_{\mathbf{s}}^{\lambda}))$.

Par convention D^{\emptyset} est l'unique module simple lorsque $n = 0$ et $\text{Ind}(D^{\emptyset})$ est la somme directe de tous les modules simples lorsque $n = 1$.

L'analogie au théorème 2.12 est donc le suivant. Ariki [2] a tout d'abord prouvé le théorème dans un cas particulier et le cas général se déduit aisément de ce cas grâce à des résultats de théorie des représentations donnés dans [17], voir la section ci-dessous.

Théorème 3.7 (Ariki). — *Le graphe de branchement de $(\mathbb{C}\mathcal{H}_{\mathbf{s}}(q))_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ correspond à la composante connexe du cristal de l'espace de Fock de niveau l associée à \mathbf{s} et e contenant la l -partition vide.*

3.4. Isomorphismes de cristaux. — Reprenons les notations ci-dessus en considérant une algèbre de Ariki-Koike $\mathbb{C}\mathcal{H}_{\mathbf{s}}(q)$, où q est une racine primitive de 1 d'ordre $e > 1$. Bien sûr, la structure de cet algèbre dépend du choix des donnée de \mathbf{s} . Mais on peut remarquer que si on permute deux éléments de \mathbf{s} , disons s_i et s_j , alors l'algèbre reste la même ! Il en est de même si on ajoute à un s_i un multiple de e . On peut formaliser ceci en considérant le groupe symétrique affine étendu $\widehat{\mathfrak{S}}_l$. Ce groupe peut être vu comme le produit semi-direct $\mathbb{Z}^l \rtimes \mathfrak{S}_l$ dont la définition se trouve dans [10, §6.2.8]. Cet ensemble est engendré par deux ensembles d'éléments $\{y_i, \mid i = 1, \dots, l\}$ et $\{\sigma_i, \mid i = 1, \dots, l-1\}$. On a une action de $\widehat{\mathfrak{S}}_l$ sur \mathbb{Z}^l donné de la manière suivante. Soit $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^l$, pour $c = 1, \dots, l-1$, on définit :

$$\sigma_c \cdot \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_{c-1}, s_{c+1}, s_c, s_{c+2}, \dots, s_l),$$

et pour $c = 1, \dots, l$:

$$y_c \cdot \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_{c-1}, s_c + e, s_{c+1}, \dots, s_l).$$

Les σ_c agissent donc comme des permutations et les y_c comme des translations. Alors on remarque que si \mathbf{s} et \mathbf{s}' sont dans la même orbite modulo cette action, on a $\mathbb{C}\mathcal{H}_{\mathbf{s}}(q) = \mathbb{C}\mathcal{H}_{\mathbf{s}'}(q)$. Il suit en particulier que l'on a :

$$\text{Irr}(\mathbb{C}\mathcal{H}_{\mathbf{s}}(q)) = \text{Irr}(\mathbb{C}\mathcal{H}_{\mathbf{s}'}(q))$$

Par le théorème 3.5, nous pouvons donc définir une bijection

$$\Psi_{\mathbf{s}, \mathbf{s}'} : \Phi_{\mathbf{s}}^e(n) \rightarrow \Phi_{\mathbf{s}'}^e(n)$$

uniquement définie de la manière suivante. Soit $\lambda \in \Phi_{\mathbf{s}}^e(n)$. Alors il existe une unique $\Psi_{\mathbf{s}, \mathbf{s}'}(\lambda) \in \Phi_{\mathbf{s}'}^e(n)$ telle que $D_{\mathbf{s}}^{\lambda} = D_{\mathbf{s}'}^{\Psi_{\mathbf{s}, \mathbf{s}'}(\lambda)}$. Une question naturelle est donc : quelle est cette bijection ? on peut en fait l'interpréter et la calculer à l'aide de la théorie des cristaux. Pour éviter les confusions, notons $\tilde{f}_j^{\mathbf{s}}$ (avec $j \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$) les opérateurs de Kashiwara associés au cristal de l'espace de Fock de niveau l et de charge \mathbf{s} et $\tilde{f}_j^{\mathbf{s}'}$ (avec $j \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$) les opérateurs de Kashiwara associés au cristal de l'espace de Fock de niveau l et de charge \mathbf{s}' . Le résultat suivant se trouve dans [17].

Théorème 3.8 (Jacon). — *Sous les notations ci-dessus, soit $\lambda \in \Phi_{\mathbf{s}}^e(n)$. Alors, il existe $(j_1, \dots, j_n) \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^n$ tel que*

$$\tilde{f}_{j_1}^{\mathbf{s}} \dots \tilde{f}_{j_n}^{\mathbf{s}} \emptyset = \lambda$$

Alors

$$\tilde{f}_{j_1}^{\mathbf{s}'} \dots \tilde{f}_{j_n}^{\mathbf{s}'} \emptyset = \Psi_{\mathbf{s}, \mathbf{s}'}(\lambda)$$

Il est possible d'obtenir un calcul plus direct de cette bijection. Un tel calcul a été proposé dans [19] en utilisant la combinatoire des cristaux. Ces bijections permettent souvent de ramener l'étude de la théorie des représentations à des cas particuliers. Par exemple, la preuve du théorème 3.7 ci-dessus suit de l'existence de cette bijection, de ce théorème combiné avec un résultat de Ariki qui prouve le théorème pour un cas particulier de \mathbf{s} mais qui couvre un domaine fondamental pour l'action ci-dessus.

4. Représentations d'algèbres de Cherednik rationnelles

Nous montrons maintenant comment ces cristaux d'espaces de Fock interviennent en théorie des représentations d'autres algèbres qui ont été récemment beaucoup étudiées : les algèbres de Cherednik rationnelles.

4.1. Définition. — Nous donnons ici la définition des algèbres de Cherednik rationnelles dans le cadre général. Soit $W \subset \text{GL}(V)$ un groupe de réflexions complexes où V est un \mathbb{C} -espace vectoriel. On note $S = \{s \in W \mid \text{rang}(Id_V - s) = 1\}$ l'ensemble des réflexions de W . Soit \mathfrak{h} un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension minimal tel qu'il existe une représentation $\rho : W \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{h})$ injective. On se donne $c : S \rightarrow \mathbb{C}$ une application invariante sur chaque classe de conjugaison. Pour chaque réflexion $s \in S$, il existe $\alpha_s \in \mathfrak{h}$ et $\alpha_s^{\vee} \in \mathfrak{h}^*$ des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes de 1 tel que $\langle \alpha_s, \alpha_s^{\vee} \rangle = 2$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathbb{C}$ est le produit scalaire usuel.

L'algèbre de Cherednik rationnelle $\mathbb{C}H_c(W)$ est la \mathbb{C} -algèbre définie comme quotient de $T(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*) \rtimes \mathbb{C}[W]$ (où T désigne l'algèbre tensorielle) par les relations :

$$[x, x'] = 0, [y, y'] = 0, [y, x] = \langle x, y \rangle - \sum_{s \in S} c(s) \langle \alpha_s, y \rangle \langle x, \alpha_s^\vee \rangle s$$

avec $x, x' \in \mathfrak{h}$ et $y, y' \in \mathfrak{h}^*$.

Ces algèbres ont été largement étudiées durant ces dernières années, elles sont liées à bon nombre de théories, citons entre autres :

- les représentations d'algèbres de Hecke (voir la remarque 4.4 ci-dessous.)
- les résolutions de singularités
- les schémas de Hilbert etc ..

Nous nous référons à [5, 16, 28] pour des articles d'expositions sur ces algèbres et leurs applications. L'un des intérêts de ces algèbres de dimension infini réside dans leur théorie des représentations, qui a de nombreuses similarités avec celle des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie semisimples :

- On a un théorème de type Poincaré-Birkhoff-Witt qui donne une décomposition triangulaire de cette algèbre. Elle est isomorphe en tant que \mathbb{C} -espace vectoriel à $\mathbb{C}[\mathfrak{h}] \otimes \mathbb{C}[W] \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$.
- Il existe une catégorie remarquable de représentations. Cette catégorie $\mathcal{O}(W)$ est la catégorie des $\mathbb{C}H_c(W)$ -modules de type fini sur lequel \mathfrak{h} agit de manière localement nilpotente. On peut montrer que cette catégorie admet des objets simples indexés par les irréductibles du groupe de réflexions complexes associés.

Nous allons considérer le groupe de réflexions complexes $G(l, 1, n)$. Dans ce cas, \mathfrak{h} est isomorphe à \mathbb{C}^n et on peut décrire les relations dans ce cas (voir [15, §2.2]). L'ensemble des $\mathbb{C}H_c(W)$ -modules simples de la catégorie $\mathcal{O}(W)$ est quant à elle donnée par l'ensemble :

$$\{L(\lambda) \mid \lambda \vdash_l n\}.$$

Les questions qui vont nous intéresser ici sont les suivantes :

- Quel est l'équivalent de la règle de branchement pour ces algèbres ?
- Peut-on caractériser les $\mathbb{C}H_c(W)$ -modules simples de dimension finis sur \mathbb{C} .

4.2. Interprétation en terme de cristal. — Nous allons tout d'abord nous intéresser au premier problème. Pour ceci, le premier problème consiste en la définition de règle de branchement et la solution est moins directe que lors des sections précédentes car l'algèbre $\mathbb{C}H_c(G(l, 1, n))$ ne se voit pas directement comme sous-algèbre de $\mathbb{C}H_c(G(l, 1, n+1))$. Un procédé d'induction de $\mathcal{O}(G(l, 1, n))$ à $\mathcal{O}(G(l, 1, n+1))$ a cependant été défini par Bezrukavnikov et Etingof [3], mais celui-ci est beaucoup plus complexe que dans les cas précédents. On a donc néanmoins l'existence d'un opérateur induction Ind et, de là, d'une règle de branchement.

Définition 4.1. — Le graphe de branchement de $(\mathbb{C}H_c(G(l, 1, n)))_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ est le graphe avec

- Sommets : l'ensemble des l -partitions de n pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$
- Flèches : on a $\lambda \rightarrow \mu$ pour $\lambda \vdash_l n$ et $\mu \vdash_l n+1$ si et seulement si $L(\mu)$ est un facteur direct de $\text{Soc}(\text{Ind}(L(\lambda)))$.

Par convention $L(\emptyset)$ est l'unique module simple lorsque $n = 0$.

Suivant [15, §2.3], on peut associer au choix de c une charge \mathbf{s} que l'on peut supposer dans \mathbb{Z}^l et un entier e que nous pouvons supposer dans $\mathbb{Z}_{>1}$ ce que nous allons faire pour donner les résultats qui nous intéressent ici. On sait que le graphe de branchement est un graphe sur l'ensemble de toutes les l -partitions. Shan [29] a montré que celui-ci est en fait donné par le cristal de l'espace de Fock associée à la charge \mathbf{s} et à e , comme définie précédemment. La preuve utilise des résultats de catégorification par Chuang et Rouquier [7].

Théorème 4.2 (Shan). — *Le graphe de branchement de $(\mathbb{C}H_c(G(l, 1, n)))_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ correspond au cristal de l'espace de Fock de niveau l associée à une certaine charge \mathbf{s} et e .*

Considérons maintenant la seconde question : il s'agit ici de savoir comment reconnaître les $\mathbb{C}H_c(W)$ -modules simples de dimension fini. Losev [26] et Shan-Vasserot [30] ont construit un opérateur sur l'ensemble des l -partitions, associé à un foncteur exact de $\mathcal{O}(G(l, 1, n-em))$ vers $\mathcal{O}(G(l, 1, n))$ pour un entier m tel que $em < n$. Nous passons sur la façon dont on construit cet opérateur, de manière

algébrique ou combinatoire (voir aussi [14] pour des descriptions explicites). Cet opérateur commute avec les opérateurs de Kashiwara et on peut donc ajouter à notre cristal de niveau l un ensemble de flèches qui reflètent l'action de cet opérateur (le graphe associé à ces flèches d'appelle le \mathcal{H} -cristal). On définit alors les *sources* de ce graphe comme étant les l -partitions du graphe vers lesquelles aucune des flèches du (double)-graphe ne pointent. La figure 4 montre le début du cristal "enrichi" par ces constructions.

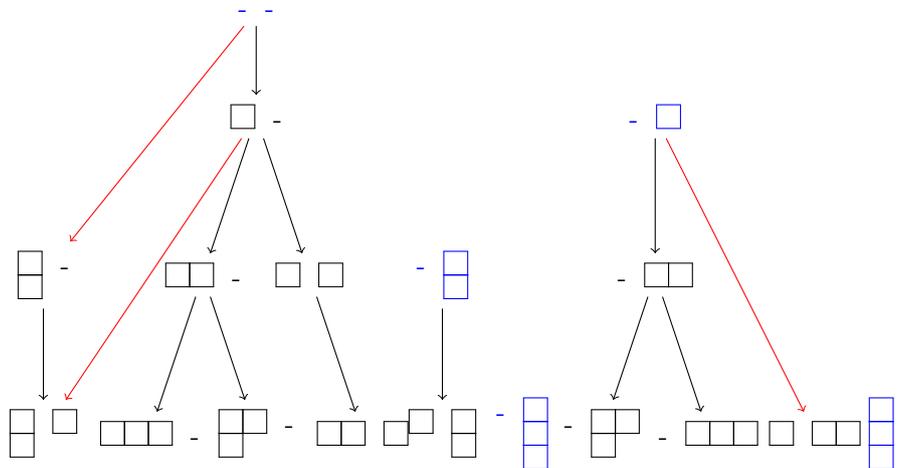


FIGURE 4. Le début du cristal de l'espace de Fock enrichi en niveau 2, $\mathbf{s} = (0, 0)$ et $e = 2$

Théorème 4.3 (Losev, Shan-Vasserot). — *Les représentations de dimension fini sont les sources du cristal de l'espace de Fock de niveau l associé à \mathbf{s} .*

Le problème de déterminer explicitement une caractérisation de ces sources a été considérée dans [20] et un résultat complet obtenu par Gerber dans [14].

Remarque 4.4. — Dans [13] est défini un foncteur de la catégorie $\mathcal{O}(G(l, 1, n))$ vers la catégorie des modules de dimension fini sur l'algèbre de Hecke $\mathcal{CH}_s(q)$ (où q est une racine de l'unité d'ordre e) : le foncteur KZ. Dans [6], il est montré que l'image par ce foncteur des modules simples $L(\lambda)$ est :

- nul si $\lambda \notin \Phi^s(n)$
- D_s^λ sinon

Si on identifie les modules $L(\lambda)$ et D_s^λ avec leurs l -partitions associées, le foncteur KZ "tue" tous les éléments non contenu dans la composante connexe de la l -partition vide et laisse invariant les autres (sous cette identification).

Remarque 4.5. — Les cristaux d'espaces de Fock apparaissent dans un autre aspect de la théorie des représentations : la théorie de représentations des groupes réductifs et plus particulièrement la théorie de Harish-Chandra. Là encore, on trouve que des cristaux de niveaux deux s'interprètent en terme de règle de branchement (voir [12] et [8]).

Exemple 4.6. — Dans le cas $l = 2$, $\mathbf{s} = (0, 0)$ et $e = 2$, on voit grâce à la figure 4 que les modules de dimension fini avec $n \leq 3$ sont donc $L(\emptyset)$, $L(\emptyset, (1, 1))$ et $L(\emptyset, (1))$.

Références

- [1] ARIKI, S. Representations of quantum algebras and combinatorics of Young tableaux, University Lecture Series, Volume 26 (American Mathematical Society, Providence, RI, 2002)
- [2] ARIKI, S. Proof of the modular branching rule for cyclotomic Hecke algebras. J. Algebra 306 (2006), no. 1, 290-300.
- [3] BEZRUKAVNIKOV R. ET ETINGOF P. Parabolic induction and restriction functors for rational Cherednik algebras, Selecta Math. (N.S.) 14 (2009), no. 3-4, 397-425

- [4] BROUÉ M., MICHEL, J. ET MALLE, G. Split Spetses for Primitive Reflection Groups. *AstÖrisque* 359 (2014), 146 pp.
- [5] CHLOUVERAKI, M. Hecke algebras and symplectic reflection algebras, *Commutative Algebra and Noncommutative Algebraic Geometry, I*, MSRI Publications 67 (2015), 95-139.
- [6] CHLOUVERAKI, M., GORDON, I ET GRIFFETH, S. Cell modules and canonical basic sets for Hecke algebras from Cherednik algebras, *Contemp.Math. Vol 562* (2012), *New Trends in Noncommutative Algebra*, 77-89.
- [7] CHUANG, J ET ROUQUIER, R. Derived equivalences for symmetric groups and sl_2 -categorification, *Annals of Math.* 167 (2008), 245-298.
- [8] DUDAS, O., VARAGNOLO, M. ET VASSEROT, E.. Categorical actions on unipotent representations I. Finite unitary groups, preprint, 2015, <https://arxiv.org/abs/1509.03269>.
- [9] FORD B. ET KLESHCHEV A.S. A proof of the Mullineux Conjecture, *Math. Z.* 226(1997), 2, 267-308
- [10] GECK, M. ET JACON, N. Representations of Hecke algebras at roots of unity. *Algebra and Applications*, 15. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011
- [11] GECK, M. ET PFEIFFER, G Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras, *London Mathematical Society Monographs. New Series*, vol. 21, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2000
- [12] GERBER T., JACON, N. ET HISS G. Harish-Chandra series in finite unitary groups and crystal graphs, *International Mathematics Research Notices*, Volume 2015, Issue 22, 1 January 2015, Pages 12206-12250.
- [13] GINZBURG, V, GUAY, N, OPDAM E ET ROUQUIER, R. On the category O for rational Cherednik algebras, *Inventiones Math.* 154 (2003), 617-651.
- [14] GERBER, T. Triple crystal action in Fock spaces. à paraître à *Advances in Mathematics*. 2016, <https://arxiv.org/abs/1612.08760>.
- [15] GERBER, T. ET NORTON, E. Heisenberg algebra, wedges and crystals. à paraître dans *Journal of Algebraic Combinatorics*. 2017, <https://arxiv.org/abs/1704.02169>.
- [16] GORDON, I Rational Cherednik Algebras, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume III*, 1209-1225, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010.
- [17] JACON, N. On the one dimensional representations of Ariki-Koike algebras at roots of unity. *J. Pure Appl. Algebra* 221 (2017), no. 6, 1298-1315
- [18] JACON, N. Kleshchev multipartitions and extended Young diagrams, Preprint 2017, <https://arxiv.org/abs/1706.07595>.
- [19] JACON, N. ET LECOUCVEY, C. Crystal isomorphisms for irreducible highest weight $U(\widehat{sl}_e)$ -modules of higher level. *Algebr. Represent. Theory* 13 (2010), no. 4, 467-489.
- [20] JACON, N. ET LECOUCVEY, C. A combinatorial decomposition of higher level Fock spaces, *Osaka Journal of Mathematics*, Vol. 50, N. 3 (2013)
- [21] JAMES, G.D. ET KERBER, A. The representation theory of the symmetric group, Addison Wesley, London, 1981.
- [22] KLESHCHEV, A. S. Branching rules for modular representations of symmetric groups. I. *J. Algebra* 178 (1995), no. 2, 493-511.
- [23] KLESHCHEV, A. S. Branching rules for modular representations of symmetric groups. II. *J. Reine Angew. Math.* 459 (1995), 163-212.
- [24] KLESHCHEV, A. S. Branching rules for modular representations of symmetric groups. III. Some corollaries and a problem of Mullineux. *J. London Math. Soc. (2)* 54 (1996), no. 1, 25-38.
- [25] LASCoux A., LECLERC B. ET THIBON J-Y Hecke algebras at roots of unity and crystal bases of quantum affine algebras, *Commun. Math. Phys.* 181 (1996), 205-263.
- [26] LOSEV, I. Supports of simple modules in cyclotomic Cherednik categories O , preprint 2015, <https://arxiv.org/abs/1509.00526>.
- [27] MATHAS, A. Iwahori-Hecke algebras and Schur algebras of the symmetric group, University lecture series, 15, Amer. Math. Soc., 1999
- [28] ROUQUIER, R. Representations of rational Cherednik algebras, in *Infinite-dimensional aspects of representation theory and applications*, pp. 103-131, American Math. Soc., 2005
- [29] SHAN P. Crystals of Fock spaces and cyclotomic rational double affine Hecke algebras, 4 : Tome 44 (2011) no. 1, p. 147-182
- [30] SHAN P. ET VASSEROT E. Heisenberg algebras and rational double affine Hecke algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 25:959-1031, 2012.
- [31] SHEPHARD, G. C. ET TODD, J. A. , Finite unitary reflection groups, *Canadian Journal of Mathematics. Canadian Mathematical Society*, 6: 274-304, 1954.
- [32] SPECHT, W. Die irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe, *Mathematische Zeitschrift*, 39 (1): 696-711, 1935.

[33] WILLIAMSON, G. On an analogy of the James conjecture, Representation Theory, vol. 18, 2014, p. 1169-2012

, Université de Reims Champagne-Ardenne, UFR Sciences exactes et naturelles, Laboratoire de Mathématiques EA 4535
Moulin de la Housse BP 1039, 51100 Reims, FRANCE • *E-mail* : `nicolas.jacon@univ-reims.fr`

N. JACON