Master Mathématiques 1ère année

COURS DE THEORIE DES REPRÉSENTATIONS

Nicolas JACON

Université de Reims

Table des matières

Chapitre 1

La notion de représentations de groupes

La théorie des représentations est un prolongement naturel de la théorie des groupes. Il s'agit ici d'étudier tous les morphismes possibles d'un groupe donné G vers le groupe des matrices inversibles sur un corps quelconque. De façon équivalente, on cherche à comprendre les actions (linéaires) de ces groupes sur des espaces vectoriels. Grâce à ces études, on peut espérer obtenir de nouvelles propriétés sur nos objets de base. Il se trouve par exemple que cette théorie est fondamental dans la classification des groupes finis simples terminés dans les années 80. Plus précisemment, on la voit apparaître dans la preuve du théorème de Feit-Thomson (1963) selon lequel tout groupe simple fini non abélien est de cardinal pair.

Historiquement, cette théorie est apparue en réponse à une question de théorie de Galois concernant les solutions d'équations polynomiales. C'est essentiellement Frobenius au début du XXème siècle qui l'a développé et a compris sa profondeur. Aujourd'hui encore, des questions simples en apparence et complètement naturelles restent encore ouvertes. Signalons enfin le rôle de cette théorie en Chimie ou en Physique : selon le modèle de Wigner (1939) chaque état quantique d'une particule correspond notamment a une représentation du groupe de Poincaré (un groupe de transformations de l'espace compatible avec la théorie de la relativité restreinte).

Dans la suite, k est un corps de caractéristique nulle et les espaces vectoriels considérés le sont sur k. Le plus souvent, on prendra $k = \mathbb{C}$ ou un corps algébriquement clos. Pour tout k-espace vectoriel de dimension finie, on note $GL(V)$ le groupe des automorphismes linéaires de V, c'est-à-dire le groupes des applications linéaires $u : V \to V$ bijectives. Si $\dim_k(V) = n$, on peut identifier $GL(V)$ au groupe des matrices carrées inversibles de taille n à coefficients dans k (via le choix de bases) $GL_n(k)$. On désignera par G un groupe fini.

1.1 Premières définitions et exemples

Définition 1.1.1 Une *représentation* du groupe G est la donnée d'un couple (ρ, V) où ρ est un morphisme $\rho : G \to GL(V)$ de G vers le groupe des automorphismes d'un k-espace vectoriel V de dimension finie (non nul). On dit alors que $\dim_k(V)$ est le *degré* ou la *dimension* de la représentation.

Par abus de langage on dit parfois que ρ est une représentation (au lieu de (ρ, V)) ce qui ne porte pas à confusion.

Fixons nous une base de V. Une représentation de degré n induit la donnée, pour chaque $g \in G$, d'une matrice inversible R_g de taille $n \times n$, la famille des matrices $(R_g)_{g \in G}$ vérifiant les égalités $R_{gg'} = R_g R_{g'}$ pour tout $g, g' \in G$. On obtient un morphisme :

$$G \to GL_n(k)$$

Attention, ceci dépend du choix d'une base de V !

Donnons quelques exemples :

Exemple 1.1.2

1. Pour tout groupe G, le morphisme $\rho : G \to GL(k)$ qui envoie tout élément de G sur Id est une représentation de degré 1 dite représentation *triviale*.
2. Si $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, pour définir une représentation de degré n, il suffit de préciser $\alpha = \rho(\bar{1}) \in GL_n(\mathbb{C})$ de telle sorte que $\alpha^m = I_n$ la matrice identité. Par exemple pour $n = 1$, toute racine m ième de l'unité convient.
3. On voit qu'une représentation de dimension 1 pour un groupe quelconque G est simplement la donnée d'un morphisme $G \to GL_1(k)$ c'est à dire d'un morphisme $G \to k^*$

Comme nous avons maintenant l'habitude en Algèbre, nous allons définir une notion de "morphisme" pour ce nouvel objet algébrique.

Définition 1.1.3 Soit (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) deux représentations de G. On dit qu'une application linéaire

$$f : V_1 \to V_2$$

est un *opérateur d'entrelacement* si pour $g \in G$, on a : $f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f$

On peut également reformuler la propriété ci-dessus à l'aide du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \\ \downarrow \rho_1(g) & & \rho_2(g) \downarrow \\ V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \end{array}.$$

On utilise divers expressions équivalentes à celle d'opérateur d'entrelacement. Dans ce cours, nous dirons aussi que f est un morphisme de représentations.

Définition 1.1.4 Deux représentations (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) sont dites équivalentes ou isomorphes s'il existe un opérateur d'entrelacement bijectif entre elles.

Supposons que l'on dispose d'un tel opérateur d'entrelacement bijectif entre (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2). On voit alors que V_1 et V_2 sont isomorphes et donc sont de mêmes dimensions. On a aussi pour tout $g \in G$

$$\rho_1(g) = f^{-1} \circ \rho_2(g) \circ f$$

Maintenant, fixons une base $\mathcal{B}_1 = (e_1, \ldots, e_n)$ de V_1 et considérons la représentation matricielle de $\rho_1(g)$ dans cette base $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1}(\rho_1(g))$. L'égalité ci-dessus nous dit simplement que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1}(\rho_1(g)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2}(\rho_2(g))$$

le morphisme $f : V_1 \to V_2$ envoyant $\mathcal{B}_1$ sur $\mathcal{B}_2$. Réciproquement si il existe une base $\mathcal{B}_1$ de V_1 et une base $\mathcal{B}_2$ de V_2 tel que pour tout $g \in G$, on a cette égalité alors ρ_1 et ρ_2 sont équivalentes. Bref, deux représentations sont équivalentes si et seulement si il existe des bases des espaces vectoriels associés dans lesquels les matrices des images des éléments de G sont les mêmes.

Remarquons ainsi que nous pouvons étoffer les remarques données au début de la section. Etant donné une repeésentation $\rho : G \to GL(V)$, si on se fixe une base $\mathcal{B}$ de ρ, on obtient un morphisme

$$G \to GL_n(k).$$

Réciproquement, pour tout nouveau choix de base de V, la donnée d'un tel morphisme, nous donne une nouvelle représentation

$$G \to GL(V)$$

qui est équivalente à ρ. Ainsi, on pourra par la suite parfois considérer simplement qu'une représentation est simplement la donnée d'un morphisme

$$G \to GL_n(k).$$

En effet, le choix de base ci-dessus ne modifie pas la classe d'équivalence de la représentation (des choix de bases différentes nous amène à des représentations équivalentes.)

En général, lorsque le morphisme ρ est injectif, on dit que la représentation est *fidèle*. Dans ce cas, $\rho(G)$ est isomorphe à G et si $V = k^n$, on voit que l'on a “réalisé” G comme un groupe de matrices.

{exrep}

Exemple 1.1.5

1. Considérons $G = \mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique d'ordre n. Pour tout $\sigma \in S_n$, on pose $\rho(\sigma) = M_\sigma$ où M_σ est la matrice de permutation associée à σ, c'est à dire la matrice de l'application linéaire qui envoie la base standard $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ sur $(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$. On vérifie facilement que ρ définit une représentation fidèle de S_n sur $\mathbb{C}^n$ appelée représentation de permutation.

2. Si G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ le groupe des matrices inversibles carrées d'ordre n, l'application $\rho : G \to \mathbb{C}$ définie par $\rho(M) = \det(M)$ est une représentation de G. Dans le cas particulier où G est le groupe des matrices de permutation défini dans 1, $\det(M_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$ où ε est la signature de la permutation σ. Cela revient à dire que la signature $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{C}$ est une représentation de degré 1.

3. Soit $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et soit $V = \mathbb{C}^2$. On considère la représentation ρ envoyant $\overline{0}$ sur l'identité et $\overline{1}$ sur le morphisme représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique (e_1, e_2). Ceci définit bien une représentation de degré 2 de G. Or cette matrice et $M_{(1,2)}$ sont clairement semblables. On en dénduit que cette représentation est équivalente à la représentation de permutation de $\mathfrak{S}_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

4. Considérons $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et ρ, ρ' les deux représentations de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ définies par $\rho(\bar{1}) = j$ et $\rho'(\bar{1}) = j^2$ où $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$. Elles sont non isomorphes. En effet si il existe $f \in L(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ tel que $f \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ f$ pour tout $g \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, on obtient avec $g = \bar{1}$ l'égalité $jf = j^2 f$ (en dimension 1 la composition des application se réduit à la multiplication). Donc $f = 0$ ce qui est absurde.
5. Plus généralement, supposons ρ et ρ' que soient deux représentations de dimension 1 d'un même groupe. Supposons les isomorphes. Alors, on a un opérateur d'entrelacement $f \in L(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ tel que $f \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ f$ pour tout $g \in G$. Comme f est linéaire, il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $f = \lambda \mathrm{Id}$ et on obtient $\rho = \rho'$.

Remarque 1.1.6 Attention, il y a une petite subtilité importante à comprendre. Du point de vue matricielle, deux représentations

$$\rho_1 : G \to GL_n(k) \text{ et } \rho_2 : G \to GL_n(k)$$

sont équivalentes si et seulement si il existe $V \in \mathrm{GL}_n(k)$ tel que

$$\rho_1(g) = V \rho_2(g) V^{-1}$$

Ceci implique que $\rho_1(g)$ et $\rho_1(g)$ sont semblables mais la réciproque est fausse car V ne doit pas dépendre du choix de $g \in G$! !

Si $\rho : G \to GL(V)$ est une représentation de G, elle définit une action de G sur V. Il suffit en effet de poser $g \cdot v = \rho(g)(v)$ pour tout $g \in G$ et $v \in V$. Par rapport à une action quelconque de G sur V, l'action définie à partir d'une représentation est linéaire, c'est à dire que l'on a en plus

$$g \cdot (\lambda v + \mu v') = \lambda g \cdot v + \mu g \cdot v' \tag{1.1}$$

pour tout $g \in G$, $v, v' \in V$ et $\lambda, \mu \in k$. Il arrive ainsi que l'on confonde la représentation (ρ, V) avec l'espace vectoriel V muni de cette action. On dit alors simplement que V est une représentation (en supposant l'action de G sur V donnée).

Réciproquement une action de groupe qui vérifie en plus (1.1) définit une représentation ρ en posant $\rho(g)v = g \cdot v$ pour tout $v \in V$ et $g \in G$ comme précédemment. Dans cette perspective, une représentation du groupe G sur le k-espace vectoriel V n'est rien d'autre qu'une action de G sur V *compatible avec sa structure linéaire.*

A l'inverse, si G agit sur l'ensemble fini $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$, il existe une représentation associée. Il suffit de considérer l'espace vectoriel $V_E := \oplus_{i=1}^n k e_i$ et de définir pour tout g, $\rho(g) \in GL(V_E)$ comme l'application linéaire envoyant la base canonique V_E sur la base $\{g \cdot e_1, \ldots, g \cdot e_n\}$.

1.2 Sous-représentations

Après la définition de morphismes, nous nous intéressons naturellement à la définition des sous-objets de notre concept principal. Celle-ci est assez naturelle :

Définition 1.2.1 Soit (ρ, V) une représentation de G. Soit W un sous-espace vectoriel de V. Supposons que pour tout $g \in G$, on a $\rho(g)(W) \subset W$. On obtient alors un morphisme

$$\rho_W : G \to GL(W)$$

tel que pour tout $g \in G$, $\rho_W(g)$ est le morphisme $\rho(g)$ restreint à W. L'application ρ_W est une représentation de G. On dit que (ρ_W, W) est une *sous-représentation.* Lorsque la représentation (ρ, V) n'admet aucune sous-représentation propre (c'est à dire autre qu'elle même), on dit que (ρ, V) est une représentation *irréductible.*

Lorsque (ρ_W, W) est une sous-représentation de (ρ, V) , on dit que W est un sous-espace ρ-invariant de V (ou simplement invariant si il n'y a as d'ambiguité). Dès que l'on dispose d'un sous-espace invariant non trivial, on a ainsi une représentation non irréductible que l'on dit réductible.

{red}

Exemple 1.2.2
1. On vérifie facilement que toute représentation de dimension 1 est nécessairement irréductible.
2. Considérons la représentation de permutation de l'exemple 1.1.5, on voit qu'il y a un sous-espace invariant :

$$\langle (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid x_1 + \ldots + x_n = 0 \rangle$$

qui est de dimension $n-1$. Une représentation de permutation est donc toujours réductible.

A l'inverse, a partir de la donnée de deux représentations d'un même groupe, on peut très facilement construire une nouvelle représentation grâce à la notion suivante de somme directe.

{sommedir}

Définition 1.2.3 Soient (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) deux représentations d'un groupe fini G. On définit le morphisme

$$\rho_1 \oplus \rho_2 : G \to GL(V_1 \oplus V_2)$$

tel que pour tout $g \in G$ et $(v_1, v_2) \in V_1 \oplus V_2$ on a

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(v_1, v_2) = (\rho_1(v_1), \rho_2(v_2))$$

Alors $((\rho_1 \oplus \rho_2), V_1 \oplus V_2)$ est une représentation de G appelée somme directe des représentations (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2).

Bien sûr, une somme directe de représentations n'est jamais irréductible. En effet, la représentation $((\rho_1 \oplus \rho_2), V_1 \oplus V_2)$ admet toujours (ρ_1, V_1) comme sous-représentation. Du point de vue matricielle, si on considère les représentations :

$$\rho_1 : G \to GL_{n_1}(k)$$

et

$$\rho_2 : G \to GL_{n_2}(k)$$

alors la somme directe $\rho_1 \oplus \rho_2$ n'est autre que la représentation

$$\rho_1 \oplus \rho_2 : G \to GL_{n_1+n_2}(k)$$

telle que pour tout $g \in G$, $(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)$ est la matrice diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}$$

On définit de même la somme directe de n représentations.

Une question naturelle concerne maintenant la décomposition de représentation. Est-il possible de "décomposer" toute représentation en somme directe de représentations irréductibles ? la réponse est oui, ceci provient du résultat fondamental suivant (voir l'exercice 1.6.8).

{mas}

Théorème 1.2.4 (Théorème de Maschke) *Soit (ρ, V) une représentation du groupe G et (ρ_1, V_1) une sous-représentation de (ρ, V). Alors, il existe une sous-représentation (ρ_2, V_2) de (ρ, V) telle que $((\rho_1 \oplus \rho_2), V_1 \oplus V_2) = (\rho, V)$ (que l'on abrège souvent en $V = V_1 \oplus V_2$, mais attention aux risques de confusion).*

Preuve. On supposera que $k = \mathbb{C}$, la preuve dans le cas d'un corps de caractéristique nulle est analogue. Considérons une base de V et notons $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire hermitien usuel sur V relatif à cette base.

A priori les applications linéaires $\rho(g)$ avec $g \in G$ ne conservent pas le produit scalaire. Comme G est fini, on peut cependant définir une forme sesquilinéaire symétrique définie positive (donc un produit scalaire) $(\cdot|\cdot)_G$ sur V en posant

$$(v_1|v_2)_G := \sum_{g \in G} (g \cdot v_1 | g \cdot v_2).$$

On vérifie immédiatement que $(g \cdot v_1, g \cdot v_2)_G = (v_1|v_2)_G$ pour tout $g \in G$ et $v_1, v_2 \in V$. Prenons pour V_2 l'orthogonal de V_1

$$\{v_2 \in V \mid \forall v_1 \in V_1,\ (v_1|v_2) = 0\}$$

par rapport à $(\cdot|\cdot)_G$. On sait que l'on a alors :

$$V = V_1 \oplus V_2$$

et V_2 est stable sous l'action de G d'où le résultat. ■

Remarque 1.2.5 Lorsque l'on regarde des représentations associées à un corps de caractéristique p, le théorème de Maschke devient faux ! on peut en fait montrer que celui-ci est vrai seulement si le cardinal du corps ne divise pas l'ordre du groupe (ou si la caractéristique est nulle). De même, si le groupe est d'ordre infini, un analogue au résultat ci-dessus est faux (voir l'exercice 1.6.5).

{comas}

Corollaire 1.2.6 *Toute représentation (ρ, V) de G sur un corps de caractéristique nulle se décompose sous la forme*

$$(\rho, V) = (\rho_1, V_1)^{\oplus m_1} \oplus \cdots \oplus (\rho_r, V_r)^{\oplus m_r}$$

où les (ρ_i, V_i) sous des représentations irréductibles non isomorphes, chacune d'entre elles apparaissant avec la multiplicité m_i. On dit alors que la théorie des représentation de G sur k est semisimple.

Preuve. On obtient l'existence de la décomposition en raisonnant par récurrence sur la dimension de V en utilisant le théorème 1.2.4 de Maschke . ■

Le lemme suivant est un lemme fondamental en théorie des représentations. La preuve relativement simple contraste avec la puissance de celui-ci.

{schur}

Lemme 1.2.7 (Lemme de Schur) *Soient (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) deux représentations complexes (i.e. sur $\mathbb{C}$) irréductibles du groupe G et $f : V_1 \to V_2$ un morphisme de représentations. Alors*

1. *Soit f est un isomorphisme, soit f est l'application nulle,*
2. *Si $\rho_1 = \rho_2$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f = \lambda I_d$.*

Preuve. Comme $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont invariants sous l'action de G et que ρ_1 et ρ_2 sont des représentations irréductibles, on a $\ker f = \{0\}$ ou V_1 et, $\operatorname{Im} f = \{0\}$ ou V_2.

Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, f possède une valeur propre λ. Mais alors $\ker(f - \lambda I_d)$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Comme, il est stable sous l'action de G, on a $\ker(f - \lambda I_d) = V_1$ et donc $f = \lambda I_d$. ■

Remarque 1.2.8 ?? L'ensemble des endomorphismes $f : V \to V$ qui commutent avec l'action de G est une sous-algèbre de $End_G(V)$ des endomorphismes linéaires de V. Lorsque k n'est pas algébriquement clos, on obtient d'après le point 1 du lemme, que cette sous-algèbre est un corps gauche (c'est à dire un corps non nécessairement commutatif). Lorsque k est algébriquement clos, ce corps n'est autre que k lui-même, en particulier, il est commutatif.

Les deux problèmes qui suivent sont fondamentaux en théorie des représentations.

1. Déterminer les représentations irréductibles, leur nombre, leur degré.
2. Décomposer une représentation en une somme de ses représentations irréductibles.

Donnons maintenant quelques liens naturels entre représentations d'un groupe et ceux d'un sous-groupe ou d'un de ces quotient. Soit G un groupe fini et H un de ses sous-groupes. Supposons que (ρ, V) est une représentation de G. Alors il est clair que la restriction de ρ à H permet de définir une représentation $(\rho_{|H}, V)$ du groupe H de même dimension.

Supposons maintenant H distingué, on peut alors considérer le groupe quotient G/H. Supposons que l'on dispose d'une représentation (ρ, V) de G/H. En considérant la surjection canonique

$$\pi : G \to G/H$$

et en posant $\rho' := \rho \circ \pi$, on obtient une représentation (ρ', V) de G de même dimension que (ρ, V). Notons de plus que si (ρ, V) est irréductible alors (ρ', V) également, un sous-espace invariant pour la seconde représentation l'étant également pour la première. Ceci est donc un moyen naturel de construire des représentations irréductibles pour le groupe G. Plus généralement, si on a un morphisme d'un groupe G_1 dans un groupe G_2 surjectif alors les représentations irréductibles de G_2 induisent des représentations irréductibles de G_1 par composition avec le morphisme.

Exemple 1.2.9 Prenons le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ et son groupe alterné A_3. Ce dernier groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Si on prend les deux représentations de dimension 1 déjà construite pour $\mathfrak{S}_3$, on voit qu'elles induisent la même représentation sur A_3 qui est la représentation triviale.

"Réciproquement", considérons le quotient $\mathfrak{S}_3/A_3$, ce groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et on sait que ce groupe admet 2 représentations (irréductibles) de dimension 1 :

1. la représentation triviale, celle-ci se relève en la représentation triviale de $\mathfrak{S}_3$
2. la représentation envoyant tout élément sur $1 \in \mathbb{C}^*$. La représentation de $\mathfrak{S}_3$ obtenue envoie les éléments de A_3 sur 1 et les autres sur -1, on obtient donc la représentation signe.

1.3 Le cas des groupes abéliens

{abe}

Observons tout d'abord que pour toute représentation irréductible (V, ρ) d'un groupe G et tout $g \in G$, l'action de g donne une application linéaire bijective de $V \to V$ mais celle-ci n'est en général pas un isomorphisme de représentations car on n'a pas nécessairement $\rho(h) \circ \rho(g)(v) = \rho(g) \circ \rho(h)(v)$ pour tout $h \in G$ et tout $v \in V$. C'est néanmoins le cas si $g \in Z(G)$ le centre de G. Dans ce cas, $\rho(g)$ est un opérateur d'entrelacement de V dans V. D'après le lemme de Schur $\rho(g) = \lambda I_d$ est un multiple de I_d. Il s'ensuite que g agit sur V en multipliant les vecteurs par une constante dès lors que $g \in Z(G)$.

Dans le cas où G est abelien, $G = Z(G)$ et tout espace est nécssairement stable car $\rho(g) = \lambda I_d$ pour tout $g \in G$ (notons qu'a priori le λ dépend de g). Il s'ensuite qu'une représentation irréductible est nécessairement de dimension 1. On a donc la proposition suivante :

{Prop_Irrabelien}

Proposition 1.3.1 *Soit G un groupe abélien fini. Alors ses représentations irréductibles sont de degré* 1.

On rappelle que tout groupe abélien fini G est isomorphe à un produit de groupes cycliques. Plus précisément, on a

$$G \simeq \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/a_r\mathbb{Z} \tag{1.2}$$

et si on impose la condition a_{i+1} divise a_i pour tout $i = 1, \ldots, r-1$, la suite $(a_1, \ldots, a_r)$ est unique. On peut alors choisir un ensemble $(g_1, \ldots, g_r)$ de générateurs où, pour tout $i = 1, \ldots, r$, g_i est d'ordre a_i. Tout élément $g \in G$ s'écrit alors de manière unique sous la forme $g = g_1^{\alpha_1} \cdots g_r^{\alpha_r}$ où $0 \leq \alpha_i \leq a_i - 1$. Pour obtenir une représentation irréductible de G, il suffit donc de déterminer l'image de chaque g_i par ρ. Comme $g_i^{a_i} = 1$, $\rho(g_i)$ doit être une racine a_i-ième de l'unité.On a donc a_i possibilités pour le choix de l'image de chaque g_i. Ceci nous donne donc $a_1 \ldots a_r = |G|$ possibilités pour le choix de notre représentations. Reste à vérifier que l'on obtient des représentations non isomorphes ce qui suit de l'exemple 1.1.5. On a donc ici pu construire toutes les représentations irréductibles d'un groupe abélien.

1.4 Algèbre de groupe et représentation régulière

{alg}

Rappelons qu'une algèbre sur un corps commutatif k est une structure algébrique $(A, +, ., \times)$ telle que

1. $(A, +, .)$ est un k-espace vectoriel,
2. la loi $\times$ est définie de $A \times A$ dans A.
3. la loi $\times$ est distributive par rapport la loi $+$,
4. pour tout (a, b) dans k^2 et pour tout (x, y) dans A^2, on a $(a.x) \times (b.y) = (ab).(x \times y)$

Soit G un groupe fini. On définit l'algèbre $k[G]$ du groupe G sur le corps k comme la k-algèbre de base $\{e_g \mid g \in G\}$ où les vecteurs de la base sont soumis aux relations

$$e_g e_{g'} = e_{gg'} \quad \forall g, g' \in G.$$

Un $k[G]$-module est un k-espace vectoriel V où l'algèbre $k[G]$ agit linéairement. Cela signifie que l'on a une action de $k[G]$ sur V telle que

$$a \cdot (\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda a \cdot v_1 + \mu a \cdot v_2 \quad \forall a \in k[G], \quad \forall v_1, v_2 \in V, \quad \forall \lambda, \mu \in k,$$
$$(aa') \cdot v = a \cdot ((a' \cdot v)) \quad \forall a, a' \in k[G] \text{ et}$$
$$(\lambda a_1 + \mu a_2) \cdot v = \lambda a_1 \cdot v + \mu a_2 \cdot v, \quad \forall v \in V, \quad \forall \lambda, \mu \in k.$$

La donnée d'une représentation du groupe G (vue comme une action linéaire de G sur V) équivaut donc à la donnée d'un $k[G]$-module et les deux termes ont tendance à être employés de façon interchangeable dans la littérature.

En effet, l'action de $k[G]$ sur V est entièrement et uniquement déterminé par l'action des e_g sur V avec $g \in G$. Ensuite cette action est équivalente à la donnée de $\rho(g) \in \mathrm{GL}(V)$.

On peut ne considérer que l'action linéaire de G sur $k[G]$ en choisissant donc $V = k[G]$ vu comme espace vectoriel. La représentation de G ainsi obtenue s'appelle la *représentation régulière* de G. Elle est de degré $|G|$ et nous allons voir dans la suite qu'elle joue un rôle essentiel. Concrètement, on définit cette représentation comme suit. Posons $n := |G|$ et fixons nous une base $\{e_g, \mid g \in G\}$ de $\urcorner^n$. Alors la représentation régulière ρ associe à tout $g \in G$ le morphisme $\rho_g \in GL(\urcorner^n)$ tel que $\rho_g(e_h) = e_{gh}$ pour tout $h \in G$. On voit que les matrices en jeu sont des matrices de permutation comme pour la représentation de permutation du groupe symétrique.

En tant qu'espace vectoriel, $k[G]$ peut également s'interpréter comme le k-espace des fonctions $f : G \to k$ que nous noterons $\mathcal{F}$. En effet, tout élément $f \in \mathcal{F}$ s'identifie à l'elément

$$\sum_{g \in G} f(g) e_g \in k[G].$$

et un élément de $k[G]$ définit une unique élément de $\mathcal{F}$ réciproquement. Attention, $\mathcal{F}$ possède aussi une structure *d'algèbre commutative* pour la multiplication des fonctions mais cette structure *ne coïncide pas* avec celle sur $k[G]$ qui n'est pas commutative lorsque G ne l'est pas.

1.5 Un exemple : le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$

{exsym}

Dans cette section, nous allons essayer de donner toutes les représentations irréductibles du groupe $\mathfrak{S}_3$. Nous verrons plus loin une approche beaucoup plus rapide mais nécessitant des résultats moins élémentaires que ceux dont nous disposons ici.

Nous disposons déjà de deux représentations de dimension 1 (et donc irréductibles) : la représentation triviale :

$$\rho_1 : \mathfrak{S}_3 \to GL(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^*$$

qui à tout $g \in G$ associe $1 \in \mathbb{C}^*$ et la représentation signe ou signature :

$$\rho_2 : \mathfrak{S}_3 \to GL(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^*$$

qui à tout $g \in G$ associe $(-1)^{\varepsilon(g)}$, où $\varepsilon(g)$ est le nombre de transpositions apparaissant dans une décomposition en produit de transpositions de g. Ces deux représentations sont évidemment non équivalentes car distinctes et de dimension 1.

Nous avons à disposition une troisème représentation de dimension 3 donnée dans l'exemple 1.1.5 appelé représentation de permutation. Celle-ci est réductible comme déjà noté dans l'exemple 1.2.2. On a en fait deux sous-espaces vectoriels invariants :

$$H_1 := \langle (1,1,1) \rangle,\ H_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid x+y+z=0\}$$

La représentation associée à H_1 est la représentation triviale. Nous allons essayer de décrire la représentation associée à H_2. Pour ceci, il suffit de connaître l'image du 3-cycle $c = (1,2,3)$ et de la transposition $t = (2,3)$ qui engendrent $\mathfrak{S}_3$. Dans la base canonique, on peut représenter de la manière suivante :

$$\rho(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \rho(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans la base (u_1, u_2, u_3) où $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1, j^2, j)$ et $u_3 = (1, j, j^2)$, les représentations matricielles deviennet :

$$\rho(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix} \text{ et } \rho(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on obtient une représentation ρ_3 de dimension 2 : tel que

$$\rho_3(c) = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix} \text{ et } \rho_3(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il n'y a pas de sous-espace invariant. En effet, il suffit de voir que les vecteurs propres associés à la première matrice ne sont pas propres pour la seconde (les sous espaces invariants non triviaux d'un espace de dimension 2 sont nécessairement engendrés par des vecteurs propres). On a donc construit une nouvelle représentation irréductible. Nous allons montrer que nous les avons toutes construites.

Soit donc (ρ, V) une représentation irréductible. Notons que nous avons $\rho(c)^3 = \mathrm{Id}$ car c est d'ordre 3. Il suit que $X^3 - 1$ est un polynôme annulateur de $\rho(c)$ et d'après le lemme des noyaux, si on pose

$$V_1 := \mathrm{Ker}(\rho(c) - 1),\ V_j := \mathrm{Ker}(\rho(c) - j),\ V_{j^2} := \mathrm{Ker}(\rho(c) - j^2)$$

on a la décomposition

$$V = V_1 \oplus V_j \oplus V_{j^{-1}}$$

Maintenant, on voit que l'on a la relation $ctc = t$. Pour $\alpha = 1, j$ ou j^2, on voit ainsi que pour $v \in V_\alpha$, on a

$$\rho(c) \circ \rho(t) = \rho(t) \circ \rho^{-1}(c)(v)$$

et donc

$$\rho(c) \circ \rho(t)(v) = \alpha^{-1} \rho(t)(v)$$

ce qui implique que $\rho(t)(v)$ est un vecteur propre de $\rho(c)$ (il non nul car v est non nul et $\rho(t)$ inversible) associé à la valeur propre α^{-1}. On conclut que

$$\rho(t)(V_\alpha) \subset V_{\alpha^{-1}}$$

Ceci implique que V_1 est un sous espace invariant et que $V_j \oplus V_{j^{-1}}$ l'est également. Ainsi, si ρ est irréductible, on se retrouve dans un des deux cas suivants :

- soit $V_1 \neq 0$ et alors $V_j = V_{j^{-1}} = 0$. On a alors $V = V_1$ et donc pour tout $v \in V$, on a $\rho(c)(v) = v$. Soit $v \in V$ un vecteur propre de $\rho(t)$ alors $\langle v \rangle$ est un sous espace invariant. On a donc $V_1 = V = \langle v \rangle$ et comme $\rho(t)^2 = 1$, on a $\rho(t)(v) = \pm v$ ce qui implique que ρ est équivalente à la représentation triviale ou à la représentation signe selon le signe.
- soit $V_1 = 0$ et $V_j \oplus V_{j^{-1}} \neq 0$. On a $\rho(t)(V_j) \subset V_{j^{-1}}$. Soit $v \in V_j$ non nul alors on a $\rho(t)(v) \neq 0$ (car $\rho(t)$ est inversible) et comme $V_j \cap V_{j^{-1}} = \{0\}$, on a que $H := \langle v, \rho(t)(v) \rangle$ est de dimension 2. On a :

  $$\rho(c)(v) = jv \text{ (car } v \in V_j),\ \rho(c)\rho(t)(v) = j^{-1}\rho(t)(v)$$

  et on $\rho(t)^2 = \mathrm{Id}$ ce qui implique que H est stable et donc $V = H$ est de dimension 2. Montrons que l'on obtient une représentation isomorphe à ρ_3. Dans la base $\{v, \rho(t)(v)\}$, on a les représentations matricielles suivantes :

  $$\rho(c) = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix} \text{ et } \rho(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  alors ρ est la représentation irréductible déjà construite ci-dessus.

1.6 Exercices

Exercice 1.6.1 :
Soit G un groupe fini simple non trivial. Montrer que G possède une représentation fidèle irréductible.

Exercice 1.6.2 :
Soit G un groupe fini et soit $\rho : G \to GL(V)$ un morphisme de groupes où V est un espace vectoriel de dimension éventuellement infini. Montrer que si ρ est irrréductible alors V est de dimension finie. Celà justifie en partie le choix de supposer l'espace vectoriel sous-jacent de dimension finie pour la définition d'une représentation.

Exercice 1.6.3 :
Donner la représentation régulière de $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 1.6.4 :
Soit $G = \{1\}$ le groupe trivial.

1. Montrer que la donnée d'une représentation de G est équivalente à la donnée d'un espace vectoriel. De même, montrer qu'un morphisme de représentation de G est équivalente à la donnée d'une application linéaire et qu'une sous-représentation à la donnée d'un sous-espace vectoriel.
2. A quelle condition deux représentations de G sont-elles isomorphes ?
3. Quelles sont les représentations de G irréductibles ? A quoi correspond le théorème de décomposition en somme directe de représentations irréductibles ?

{ex1.5}

Exercice 1.6.5 :
Soit G le groupe abélien $\mathbb{Z}$.

1. Montrer que se donner une représentation de G revient à se donner un couple (V, φ) où $\varphi \in GL(V)$.
2. Montrer que, sous cette correspondance, les sous-représentations correspondent aux sous-espaces stables par φ.
3. Montrer quun morphisme de représentations de G de "(V, φ) dans (W, ψ)" est une application linéaire f vérifiant $f \circ \varphi = \psi \circ f$.
4. En déduire que deux représentations de $\mathbb{Z}$ sont isomorphes si et seulement si les automorphismes associés sont semblables.
5. Montrer qu'une représentation irréductible de dimension finie de G sur k induit la donnée d'un polynôme irréductible sur k différent de X. Que se passe-t-il si k est algébriquement clos ? A quoi correspond le λ du polynôme $X - \lambda$ en terme de l'automorphisme φ ?
6. Montrer que l'automorphisme de k^2 donné par la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
définit une représentation linéaire de $\mathbb{Z}$ qui nest pas somme directe de sous-représentations simples (on pourra montrer que la droite engendrée par le premier vecteur de base est la seule sous-représentation non triviale).

Exercice 1.6.6 :
Soit H un sous-groupe commutatif d'un groupe fini G. Montrer que la dimension de toute représentation irréductible de G est nécessairement plus petite ou égale à l'indice de H dans G

Exercice 1.6.7 :
En utilisant le lemme de Schur, montrer que le centre du groupe $GL_n(\mathbb{C})$ est le groupe des homothéties H.

{exops}

Exercice 1.6.8 :
Soit G un groupe et (ρ, V) une représentation du groupe G. On suppose que V

est muni d'un produit scalaire $(.|.)$. On dit que ρ est une représentation unitaire pour ce produit scalaire si $\rho(g)$ est unitaire pour tout $g \in G$ c'est à dire si

$$\forall g \in G,\ \forall (x,y) \in V^2, (\rho(g)(x)|\rho(g)(y)) = (x|y)$$

La représentation est dite unitarisable si il existe un produit scalaire tel que ρ soit unitaire.

1. Montrer que pour toute fonction φ à valeur dans un espace vectoriel, on a

$$\forall g \in G,\ \sum_{h \in G} \varphi(gh) = \sum_{h \in G} \varphi(hg) = \sum_{k \in G} \varphi(k)$$

2. Montrer que l'application qui à $(x,y) \in V^2$ associe

$$(x|y)' := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho(g)(x)|\rho(g)(y)) \in \mathbb{C}$$

   est un produit scalaire de V.

3. Montrer que toute représentation de G est unitarisable.

Exercice 1.6.9 :
Soit G un groupe fini et (ρ, V) une représentation irréductible d'un groupe fini G sur un corps algébriquement clos.

1. Montrer que tout élément du centre de G agit sur V comme une homothétie.
2. En déduire que si le centre de G nest pas cyclique (et donc non triviale), la représentation (ρ, V) n'est pas fidèle.

Chapitre 2

Caractère d'une représentation

La *théorie des caractères* a pour objectif de caractériser les représentations irréductibles et de calculer la décomposition d'une représentation quelconque en somme directe de représentations irréductibles. Cette théorie extrêmement puissante permet de développer de nombreuses propriétés de la théorie des représentations. Dans tout ce chapitre, G sera un groupe fini.

2.1 Définition et exemples

Soit (ρ, V) une représentation du groupe fini G. On a vu que pour tout $g \in G$, on pouvait considérer $\rho(g)$ comme une matrice en fixant une base de V. On rappelle que $\det(\rho(g))$ et $\mathrm{tr}(\rho(g))$ ne dépendent alors que de $\rho(g)$ (et même seulement de la classe d'équivalence de ρ et de g) et pas de la base choisie. On dit qu'une fonction $f : G \to k$ est *centrale* si elle est invariante sur les classes de conjugaison, c'est à dire si $f(hgh^{-1}) = f(g)$ pour tout $(g, h) \in G^2$.

Définition 2.1.1 Le *caractère* de la représentation (ρ, V) est l'application $\chi : G \to k$ définie par $\chi(g) = \mathrm{tr}(\rho(g))$ pour tout $g \in G$.

Bien sûr, deux représentations équivalentes ont exactement le même caractère. Ceci vient du fait que deux matrices semblables ont même trace. On verra plus loin que la réciproque est vrai (!)

Exemple 2.1.2

1. Lorsque (ρ, V) est une représentation de dimension 1 alors la représentation et sa trace se confondent.
2. Prenons la représentation de permutation de l'exemple 1.1.5, on voit que le caractère d'un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est égal au nombre de 1 sur la diagonale c'est à dire :
$$\forall g \in G, \chi_{\mathrm{perm}}(\sigma) = \sharp\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \sigma(i) = i\}$$
c'est le cardinal du fixateur de σ sous l'action naturelle du groupe symétrique sur $\{1, \ldots, n\}$.

Nous allons voir que le caractère d'une représentation contient énormément d'information sur celle-ci.

{prop-ele_char}

Proposition 2.1.3 *Soit (ρ, V) une représentation de degré n et χ son caractère.*

1. $\chi(1) = n$.
2. *Si $k = \mathbb{C}$ alors $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ pour tout $g \in G$.*
3. $\chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$ *pour tout $g, h \in G$, χ est donc* une fonction centrale.

Preuve. Pour le 1., on sait que $1 \in G$ doit être envoyé sur l'identité. La trace de l'identité étant égal à la dimension de V, ceci permet de conclure. Le point 3 vient à la fois du fait que ρ est un morphisme et d'une propriété de la trace :

$$\chi(hgh^{-1}) = \mathrm{tr}(\rho(hgh^{-1}) = \mathrm{tr}(\rho(g)\rho(h)\rho(h^{-1})) = \mathrm{tr}(\rho(h) = \chi(h)$$

Pour le 2., fixons $g \in G$, comme G est fini, g et donc $\rho(g)$ sont d'ordre fini. Ceci implique que les valeurs propres de $\rho(g)$ sont des racines de l'unité (un polynôme annulateur étant de la forme $X^n - 1$). La matrice $\rho(g)$ étant trigonalisable, la trace de $\rho(g)$ est la somme des valeurs propres de $\rho(g)$. La trace de $\rho(g)^{-1}$ est la somme des inverses de ses racines et donc des conjugués de celle-ci ce qui permet de conclure. ∎

{algebrique1}

Remarque 2.1.4 Si (ρ, V) est une représentation de caractère χ alors pour tout $s \in G$, $\rho(s)$ a pour valeur propres des racindes de l'unité et donc $\chi(s)$ est une somme de racines de l'unité. Une racine de l'unité étant un entier algébrique et l'ensemble des entiers algébriques formant un anneau, on en déduit que $\chi(s)$ est toujours un entier algébrique.

La proposition suivante suit de la représentation matricielle d'une représentation et de la définition de somme directe dans le chapitre précédent (Définition 1.2.3)

{Prop_PT}

Proposition 2.1.5 *Soient (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) deux représentations de G de caractères χ_1 et χ_2. Le caractère de $(\rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2)$ vaut $\chi_1 + \chi_2$.*

La proposition 2.1.3 ci-dessus montre donc que le caractère d'une représentation est une fonction de trace. Donc elle est invariante sur les classes de conjugaison de la représentation. Si χ est un caractère, nous noterons souvent $\chi(C)$ pour la valeur commune des éléments de G appartenant à la classe de conjugaison C.

D'autre part, d'après la proposition 2.1.5, on voit que les caractères des représentations d'un groupe G sont des combinaisons linéaires des caractères des représentations irréductibles (ces derniers caractèrres sont simplement appelés caractèrres irréductibles.) En effet, d'après le théorème 1.2.4 de Maschke, toute représentation est une somme de représentations irréductibles et la proposition ci-dessus nous montrent que le caractère de cette représentation correspond à la somme des représentations irréductibles apparaissant dans la représentation.

Exemple 2.1.6 Prenons $G = \mathfrak{S}_3$. Alors on sait que les caractères des deux représentations irréductibles de dimension 1 sont égales aux représentation elle mêmes. Ainsi, la caractère de la représentation triviale χ_1 est telle que

$$\forall g \in G, \quad \chi_1(g) = 1$$

celui de χ_2 associé à la représentation signe est tel que

$$\forall g \in G \quad \chi_2(g) = (-1)^{\varepsilon(g)}.$$

Enfin, le caractère χ_3 associé à la représentation de dimension 2 est entièrement déterminé par la donné de l'image d'un représentant dans chaque classe de conjugaison. Il y en a 3 : celle contenant l'élément neutre, celle contenant les 3-cycles et celle contenant les transpositions. Si C_1 est la calsse de conjugaison des 3-cycles et C_2 des transpositions, on a :

$$\chi_3(1) = 2,\ \chi_3(C_1) = -1,\ \chi_3(C_2) = 0$$

On voit que le caractère χ de la représentation de permutation vérifie bien

$$\chi = \chi_1 + \chi_3$$

suivant le fait que $\rho_{\text{perm}} = \rho_1 \oplus \rho_3$

2.2 Orthogonalité des caractères

Le but est maintenant de trouver des moyens simples pour calculer le caractère d'une représentation sans forcément bien la connaître. Pour ceci, on définit un produit scalaire hermitien sur l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}$ de G vers $\mathbb{C}$ en posant

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g)\overline{\psi(g)} \tag{2.1}$$

pour φ et ψ deux fonctions de G dans $\mathbb{C}$. Soient (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) deux représentations irréductibles de G. Pour toute application linéaire $f : V_1 \to V_2$, on pose

$$T_f := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_2(g)^{-1} \circ f \circ \rho_1(g). \tag{2.2}$$

Il s'agit donc également d'une application linéaire de V_1 dans V_2.

Lemme 2.2.1 *Soient (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) deux représentations irréductibles d'un même groupe G. En gardant les notations ci-dessus, on a les propriétés suivantes.*

1. *Si V_1 et V_2 ne sont pas isomorphes, on a $T_f = 0$,*
2. *Si $V_1 = V_2$ et $\rho_1 = \rho_2$, T_f est une homothétie de V_1 de rapport $\dfrac{1}{n_1}\operatorname{tr}(f)$ où $n_1 = \dim_{\mathbb{C}}(V_1)$.*

Preuve. On vérifie tout d'abord que pour tout $h \in G$, $\rho_2(h) \circ T_f = T_f \circ \rho_1(h)$. Soit donc $h \in G$, on a :

$$\begin{aligned}
\rho_2(h) \circ T_f &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_2(hg^{-1}) \circ f \circ \rho_1(g) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} \rho_2(k) \circ f \circ \rho_1(hk) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} \rho_2(k) \circ f \circ \rho_1(h) \circ \rho_1(h) \\
&= T_f \circ \rho_1(h)
\end{aligned}$$

Cela signifie que $T_f : V_1 \to V_2$ est un morphisme de représentations. Il découle alors du lemme de Schur (lemme 1.2.7) que $T_f = 0$ dans le premier cas et que $T_f = \lambda I_d$ dans le second pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(T_f) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{tr}(\rho_1(g)^{-1} \circ f \circ \rho_1(g)) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{tr}(f) \\
&= \mathrm{tr}(f)
\end{aligned}$$

Or on a $\mathrm{tr}(T_f) = n_1 \lambda$ d'où le résultat. ■

Supposons maintenant que ρ_1 et ρ_2 soient données sous formes matricielles. Autrement dit on fixe une base de V_1 et une base de V_2 et pour tout $g \in G$, $\rho_1(g) = (r^{(1)}_{i_1,j_1}(g))$ et $\rho_2(g) = (r^{(2)}_{i_2,j_2}(g))$ sont des matrices carrées d'ordre $n_1 = \dim_{\mathbb{C}}(V_1)$ et $n_2 = \dim_{\mathbb{C}}(V_2)$. Notons respectivement (x_{i_2,i_1}) et $(x^T_{i_2,i_1})$ les matrices de f et T_f par rapport à ces bases. Ce sont donc des matrices rectangulaires de taille $n_2 \times n_1$. D'après (2.2), on a

$$x^T_{i_2,i_1} = \frac{1}{|G|} \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_2=1}^{n_2} \sum_{g \in G} r^{(2)}_{i_2,j_2}(g^{-1}) x_{j_2,j_1} r^{(1)}_{j_1,i_1}(g).$$

En faisant décrire à f toutes les applications linéaires de V_1 dans V_2, on dispose donc pour tout couple (i_1, i_2) d'une forme linéaire

$$\theta_G : \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Mat}_{n_2 \times n_1}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ M \mapsto x^T_{i_2,i_1} \end{array} \right.$$

définie par

$$\theta_G(M) = \frac{1}{|G|} \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_2=1}^{n_2} \sum_{g \in G} r^{(2)}_{i_2,j_2}(g^{-1}) x_{j_2,j_1} r^{(1)}_{j_1,i_1}(g) \text{ où } M = (x_{j_2,j_1}). \tag{2.3}$$

Lorsque V_1 et V_2 ne sont pas isomorphes, θ_G est la forme linéaire nulle d'après le lemme précédent. Ses coefficients matriciels (i.e. ceux de chaque coordonnée x_{j_2,j_1}) sont donc nuls, autrement dit

$$\sum_{g \in G} r^{(2)}_{i_2,j_2}(g^{-1}) r^{(1)}_{j_1,i_1}(g) = 0 \quad \text{pour } 1 \le i_1, j_1 \le n_1 \text{ et } 1 \le i_2, j_2 \le n_2. \tag{2.4}$$

Lorsque $V_1 = V_2$ et $\rho_1 = \rho_2$ ce même lemme implique :

$$x^T_{i_2,i_1} = \frac{1}{n_1} \mathrm{tr}(f) \delta_{i_2,i_1} = \frac{1}{n_1} \sum_{j_1,j_2} x_{j_2,j_1} \delta_{j_2,j_1} \delta_{i_2,i_1} = \theta_G(M). \tag{2.5}$$

Les deux expressions ci-dessus donnent deux expressions pour les coefficients matriciels de θ_G. On a donc pour $1 \le i_1, j_1, i_2, j_2 \le n_1$

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r^{(2)}_{i_2,j_2}(g^{-1}) r^{(1)}_{j_1,i_1}(g) = \frac{1}{n_1} \delta_{j_2,j_1} \delta_{i_2,i_1} = \left\{ \begin{array}{l} 1/n_1 \text{ si } i_1 = i_2, j_1 = j_2, \\ 0 \text{ sinon,} \end{array} \right. \tag{2.6}$$

en particulier si $i_1 = j_1$ et $i_2 = j_2$

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} r^{(2)}_{i_2,i_2}(g^{-1})r^{(1)}_{i_1,i_1}(g) = \begin{cases} 1/n_1 \text{ si } i_1 = i_2 = j_1 = j_2, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \tag{2.7}$$

Grâce à cette discussion, nous pouvons maintenant prouver le théorème fondamental suivant. Rappelons que nous avons dfini un produit scalaire sur 'l'ensemble $\mathcal{F}$ et donc une norme.

{Th_ortho_car}

Théorème 2.2.2 (Orthonormalité des caractères) *On suppose que $k = \mathbb{C}$.*

1. *Si χ est le caractère d'une représentation irréductible de G, on a $\|\chi\|^2 = (\chi, \chi) = 1$.*
2. *Si χ_1 et χ_2 sont deux caractères de deux représentations irréductibles non isomorphes, alors $(\chi_1, \chi_2) = 0$.*

Preuve. Dans le premier cas on a par définition du produit scalaire :

$$(\chi, \chi) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^{-1})\chi(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} r_{i,i}(g^{-1})r_{j,j}(g).$$

Mais d'après notre travail ci-dessus, $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} r^{(1)}_{i,i}(g^{-1})r^{(1)}_{j,j}(g) = \frac{1}{n_1}\delta_{i,j}$ pour tout $i, j = 1, \ldots, n_1$. Donc $(\chi, \chi) = 1$.

Dans le second cas, on a :

$$(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_2(g^{-1})\chi_1(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{i=1}^{n_2}\sum_{j=1}^{n_1} r^{(2)}_{i,i}(g^{-1})r^{(1)}_{j,j}(g).$$

Mais on a aussi $\sum_{g\in G} r^{(2)}_{i,j}(g^{-1})r^{(1)}_{i,j}(g) = 0$ pour $1 \leq i \leq n_1$ et $1 \leq j \leq n_2$. On a donc bien $(\chi_1, \chi_2) = 0$. ■

Notons en particulier qu'a chaque caractère ireéductible correspond une unique représentation irréductible. En effet, si deux représentations irréductibles ont même caractères, elles ne peuvent que être isomorphe d'après la proposition ci-dessus. Le corollaire suivant est un exemple de la puissance de la théorie des caractères en théorie des représentations.

Corollaire 2.2.3 *Deux représentations ayant même caractère sont équivalentes.*

On peut maintenant présenter les résultats précédents de la manière suivante :

{Th_ortho_car}

Théorème 2.2.4 *Les caractères irréductibles d'un groupe fini G forment un système orthonormé dans l'espace des fonctions de G dans $\mathbb{C}$ (muni du produit scalaire déjà défini).*

Comme G est fini, cet espace est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension fini (une base est donnée par les fonctions indicatrices en les éléments de G) et Il suit en particulier :

Corollaire 2.2.5 *Le nombret de caractèrres irréductibles (et donc de représentations irréductibles) d'un groupe fini est fini.*

Mieux, ce résultat va nous permettre de comprendre comment une représentation non nécessairement irréductible se décompose en irréductibles.

Théorème 2.2.6 *Soit (ρ, V) une représentation de G et soit χ_ρ son caractère. Soit* {comas2}

$$\{(\rho_1, V_1), \dots, (\rho_r, V_r)\}$$

l'ensemble de représentations irréductibles. Pour $i = 1, \dots, r$, on note χ_i le caractère de (ρ_i, V_i). Alors on a

$$(\rho, V) = (\rho_1, V_1)^{\oplus m_1} \oplus \cdots \oplus (\rho_r, V_r)^{\oplus m_r}$$

où pour tout $i = 1, \dots, r$, on a $m_i = (\chi_i, \chi_\rho)$. En particulier, cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Preuve. On se donne deux représentations ρ et ρ'. Si les deux ont même caractère, alors les nombres m_i du corollaire 1.2.6 sont les mêmes, les composantes isotypiques aussi et donc les représentations sont équivalentes. ■

Remarque 2.2.7 De là, on voit aussi que le produit scalaire de deux caractères (χ, χ) est toujours un entier positif. Il suffit en effet de décomposer les deux caractères en combinaisons linéaire (à coefficients entiers positifs donc) de caractères irréductibles et d'utiliser les formules d'orthonormalité. {entier}

Dans la proposition ci-dessus, pour $i = 1, \dots, r$, la représentation $m_i\rho_i$ est souvent appelée la composante isotypique de type ρ_i de ρ. On obtient aussi un critère permettant de comprendre quand une représentation est irréductible. Pour ceci, il suffit de remarquer que selon les notations du théorème 2.2.6, on a

$$(\chi_\rho, \chi_\rho) = \sum_{1 \leq i \leq r} m_i^2$$

Corollaire 2.2.8 *Pour qu'une représentation (ρ, V) soit irréductible, il faut et il suffit que $(\chi_\rho, \chi_\rho) = 1$.* {Cor_util}

Preuve. On a $(\chi_\rho, \chi_\rho) = 1$ si et seulement si il existe $i \in \{1, \dots, r\}$ tel que $m_i = 1$ et $m_j = 0$ si $j \neq i$ et le résultat suit. ■

Exemple 2.2.9 Prenons la représentation de permutation du groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ et son caractère χ associé. Il y a 5 classes de conjugaison dans ce groupe. Celle de 1, celle des transpositions, celle des 3-cycles, celle correspondant aux produit de deux transpositions à support disjoint et celle des 4-cycles.

1. On a $\chi(1) = 4$,
2. Si t est une transposition (il y en a 6), on a $\chi(t) = 2$
3. Si c est un 3-cycle (il y en a 8), on a $\chi(c) = 1$
4. si t' est un produit de deux transpositions (il y en a 3) ou un 4-cycle (il y en a 6), on a $\chi(t') = 0$

On en déduit

$$(\chi, \chi) = \frac{1}{24}(4^2 + 6 \times 2^2 + 8 \times 1^2 + 3 \times 0^2 + 6 \times 0^2) = 2$$

Donc ρ n'est pas irréductible. Etudions la composante isostypique de la représentation trivial de caractère χ_1 :

$$(\chi, \chi_1) = \frac{1}{24}(4 \times 1 + 6 \times (2 \times 1) + 8 \times (1 \times 1) + 3 \times (0 \times 1) + 6 \times (0 \times 1) = 1$$

On sait donc que la représentation triviale apparaît une fois dans la représentation de permutation. Notons (ρ', V') la représentation telle que

$$(\rho, V) = (\rho_1, \mathbb{C}) \oplus (\rho', V')$$

Soit χ' son caractère, alors on a $\chi' = \chi - \chi_1$ donc

1. On a $\chi'(1) = 3$,
2. Si t est une transposition, on a $\chi(t) = 1$
3. Si c est un 3-cycle, on a $\chi(c) = 0$
4. si t' est un produit de deux transpositions ou un 4-cycle, on a $\chi(t') = -1$

On a alors :

$$(\chi', \chi') = \frac{1}{24}(3^2 + 6 \times 1^2 + 8 \times 0^2 + 3 \times (-1)^2 + 6 \times (-1)^2 = 1$$

C'est donc un caractère irréductible. Donc la décomposition en irréductibles de la représentation de permutation est terminée. Notons que l'on a aussi réussi à trouver une représentation irréductible de dimension 3.

2.3 Etude de la représentation régulière

On rappelle que la représentation régulière est celle où $V = \mathbb{C}[G]$ et l'action ρ de G sur V s'obtient par multiplication à gauche. Pour calculer χ le caractère de cette représentation, il suffit d'obtenir la trace de la matrice de $\rho(g), g \in G$ dans la base $\{e_h \mid h \in G\}$. Or $g \cdot e_h = \rho(g)(e_h) = e_{gh}$ pour tout $g, h \in G$. Ainsi

$$\chi(g) = \begin{cases} 0 \text{ si } g \neq 1, \\ |G| \text{ si } g = 1. \end{cases}$$

Nous pouvons en déduire la proposition suivante :

{prop-dec-reg}

Proposition 2.3.1 *La représentation régulière se décompose en*

$$\mathbb{C}[G] = V_1^{\oplus \dim_{\mathbb{C}}(V_1)} \oplus \cdots \oplus V_r^{\oplus \dim_{\mathbb{C}}(V_r)}$$

*où $V_1, \ldots, V_r$ est la liste de toutes les représentations irréducibles de G. Ainsi leur nombre est fini et chacune d'entre elles apparaît dans $\mathbb{C}[G]$ avec une multiplicité égale à sa dimension. Si on note $n_1, \ldots, n_r$ le degré de ces représentations irréducibles, on a l'*égalité de Burnside *suivante :*

$$|G| = n_1^2 + \cdots + n_r^2.$$

Preuve. Soit V_i une représentation irréductible et χ_i son caractère. On a

$$(\chi, \chi_i) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\chi_i(g)} = \frac{1}{|G|} \chi(1) \chi_i(1) = n_i.$$

L'égalité $|G| = n_1^2 + \cdots + n_r^2$ s'obtient en utilisant la remarque précédent le corollaire 2.2.8 ∎

Exemple 2.3.2 On retrouve facilement en utilisant l'égalité de Burnside qu'un groupe abélien d'ordre n possède exactement n représentations irréductibles puisqu'elles sont toutes de degré 1.

2.4 Nombre et dimensions des représentations irréductibles

Nous allons maintenant nous intéresser au nombre de représentations irréductibles. L'idée est d'étudier l'algèbre $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{C}$ des fonctions centrales sur G. Rappelons qu'une fonction $f : G \to \mathbb{C}$ est dite centrale si elle est constantes sur les classes de conjugaisons de G. Notons $C_1, \ldots, C_r$ les différentes classes de conjugaison de G. Pour tout $i = 1, \ldots, r$, on définit la fonction caractéristique $1_{C_i} : G \to \mathbb{C}$ par

$$1_{C_i}(g) = \begin{cases} 1 \text{ si } g \in C_i, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Il s'agit bien sûr d'une fonction centrale.

Lemme 2.4.1 *Les fonctions indicatrices $1_{C_1}, \ldots, 1_{C_r}$ forment une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{A}$.*

Preuve. Il est clair que l'on a une famille libres avec ces r-fonctions. Reste à montrer que la famille est génératrice. Soit χ une fonction centrale. On sait qu'elle est constante sur les classes de conjugaison. Notons $h_i \in \mathbb{C}$ la valeur pris par χ sur la classe C_i pour $i = 1, \ldots, r$. On a alors clairement

$$\chi = \sum_{1 \leq i \leq r} h_i 1_{C_i}$$

ce qui permet de conclure. ∎

Pour une fonction $f \in \mathcal{A}$ et une représentation (ρ, V) de G, on définit l'endomorphisme u_f de V par

$$u_f := \sum_{g \in G} f(g) \rho(g) \in End(V). \tag{2.8}$$

Lemme 2.4.2 *Supposons que (ρ, V) soit une représentation irréductible de degré n. Alors u_f est une homothétie de rapport*

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} f(g) \chi(g) = \frac{|G|}{n} (f, \overline{\chi})$$

où χ est la caractère de (ρ, V).

Preuve. On vérifie facilement que pour tout $g \in G$, $\rho(g)u_f\rho(g)^{-1} = u_f$, c'est à dire que $\rho(g)u_f = u_f\rho(g)$. D'après le lemme de Schur, u_f est une homotéthie. Pour calculer son rapport λ, on applique la trace à (2.8). Cela donne

$$n\lambda = \sum_{g\in G} f(g)\chi(g).$$

■

{Th_nbcarac}

Théorème 2.4.3 *Le nombre de caractères irréductibles est égal au nombre de classes de conjugaison de G. De plus, les caractères irréductibles forment une base orthonormée de l'algèbre des fonctions centrales.*

Preuve. Soient $\{\chi_1, \dots, \chi_s\}$ l'ensemble des caractères irréductibles de G. D'après le Théorème 2.2.4, $\chi_1, \dots, \chi_s$ est une famille orthonormée donc en particulier, une famille libre. Il suffit de démontrer que tout élément $f \in \mathcal{A}$ orthogonal à tous les χ_i est nul. En effet, sous cette hypothèse, prenons $f \in \mathcal{A}$ et posons $f_0 := \sum_{1\leq i\leq s}(\chi_i, f)\chi_i$. Alors pour tout $j = 1, \dots s$, on a $(\chi_j, f - f_0) = 0$ et donc $f = f_0$ ce qui implique que la famille est génératrice.

Considérons donc une fonction f orthogonale à tous les χ_i. Pour toute représentation (ρ, V) de G, on définit

$$v_f := \sum_{g\in G} \overline{f(g)}\rho(g).$$

Puisque f est orthogonal à tous les χ_i, le lemme précédent (que l'on applique à $\overline{f}$) implique que $v_f = 0$ lorsque V est une représentation irréductible. Si V n'est pas irréducible, sa décomposition en irréductibles permet d'écrire pour tout $g \in G$, $\rho(g) = \rho_1(g) + \cdots + \rho_k(g)$ où les ρ_i sont irréductibles. On a alors

$$v_f = \sum_{i=1}^{k} \sum_{g\in G} \overline{f(g)}\rho_i(g) = 0.$$

Donc v_f est en fait toujours nul. En particulier, si on prend pour V la représentation régulière de G de caractère χ, nous aurons

$$v_f(e_1) = \sum_{g\in G} \overline{f(g)}\rho(g)(e_1) = \sum_{g\in G} \overline{f(g)}e_g = 0.$$

Donc $\overline{f(g)} = 0 = f(g)$ pour tout $g \in G$ comme souhaité. ■

{orthc}

Proposition 2.4.4 *Soit $\chi_1, \dots, \chi_r$ les caractères irréductibles de G et soit C_1, $\dots$, C_r les classes de conjugaisons. ALors on a :*

- $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq r} \overline{\chi_i(g)}\chi_i(g') = 0$ *si g et g' ne sont pas conjugués.*
- $\displaystyle\frac{1}{|G|} \sum_{1\leq i\leq r} \overline{\chi_i(g)}\chi_i(g) = \frac{1}{C_i}$ *avec $g \in C_i$.*

Preuve. On sait que si f est une fonction centrale alors

$$f = \sum_{1 \leq i \leq r} (\chi_i | f) \chi_i$$

par le théorème 2.4.3. Pour $i = j, \ldots, r$, prenons la fonction indicatrice 1_{C_j}. , on a :

$$(\chi_i, 1_{C_j}) = \frac{1}{o(G)} \sum_{h \in G} \overline{\chi_i(h)} 1_{C_j}(h) = \frac{|C_j|}{o(G)} \overline{\chi_i(C_j)}$$

et donc

$$1_{C_j} = \frac{|C_j|}{o(G)} \sum_{1 \leq i \leq r} \overline{\chi_i(C_j)} \chi_i$$

et il suffit maintenant d'évaluer cette formule en des éléments de G. Selon qu'ils appartiennent à C_j ou non, on obtient le résultat. ■

Exemple 2.4.5 En prenant la classe de conjugaison de l'élément neutre, il suit l'égalité de Burnside de la proposition . {prop-dec-reg}

Remarque 2.4.6 Avant d'explicitement trouver toutes les représentations (ou tous les caractères) irréductibles d'un groupe, on peut déjà se demander quel est leur nombre et si il y a un moyen simple de les indexer, de les classer. Le théorème ci-dessus permet donc de répondre à cette question. Par exemple, prenons le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. On sait que deux éléments de $\mathfrak{S}_n$ sont dans la même classe de conjugaison si et seulement si ils ont le même type. Le type d'une permutation σ est la suite des longueurs des cycles apparaissant dans une décomposition de σ en produits de cycles à supports disjoints. Le type est donc une suite d'él'éments $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ de $\mathbb{N}$ classés dans l'ordre décroissant et de somme totale n. On dit que c'est une partition de n. On en déduit donc que les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ sont en bijection (et sont donc indexés) par l'ensemble des partitions de n.

Enfin, terminons par un autre théorème fondamental dont la preuve est donné dans l'exercice 2.6.2

Théorème 2.4.7 *Soit G un groupe fini de cardinal n et d le degré d'une représentation irréductible artitraire de G alors d divise n.*

Exemple 2.4.8 Si G est un groupe de cardinal p premier alors ses seules représentations irréductibles sont donc de degré 1. Ce résultat était déjà connu car un tel groupe est cyclique isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

2.5 Table de caractères et exemples

Soit G un groupe fini. On appelle table de caractères la table dont les colonnes correspondent aux classes de conjugaison et dont les lignes correspondent aux caratèrres irréductibles. A l'intersection de la ligne et de la colonne, on inscrit la valeur du caractère sur la classe de conjugaison associée. Ceci permet de déstermineer entièrement toutes les valeurs de tous les caratères irréductibles de G.

Notons $C_1, \dots, C_r$ les classes de conjugaison de G et $\chi_1, \dots, \chi_r$ les caractères irréductibles.

	C_1	C_2	$\dots$	C_r
χ_1	$\chi_1(C_1)$	$\chi_1(C_2)$	$\dots$	$\chi_r(C_r)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
χ_r	$\chi_r(C_1)$	$\chi_r(C_2)$	$\dots$	$\chi_r(C_r)$

Maintenant, on peut déterminer entièrrement cette table sans forcément connaître toutes les représentations en utilisant les astuces suivantes :

- les lignes sont “orthogonales” : c'est le théorème 2.2.4 qui implique que :

$$\frac{1}{|G|}\sum_{1\leq i\leq r}|C_i|\overline{\chi_k(C_i)}\chi_s(C_i) = \delta_{k,l}$$

- les colonnes sont “orthogonales”, d'après la proposition 2.4.4, on a :

$$\frac{1}{|G|}\sum_{1\leq i\leq r}\overline{\chi_i(C_k)}\chi_i(C_p) = \delta_{k,p}\frac{1}{C_k}$$

Reprenons l'exemple du groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$. On a vu dans la section 1.5 comment trouver toutes ces représentations. On peut en fait maintenant déterminer les caractères irréductibles de manière trés simple. En effet, on sait que l'on a 3 classes de conjugaisons : C_1 (celle de l'élément neutre), C_2 (celle des transpositions) et C_3 (celle des 3-cycles) donc 3 caractères irréductibles χ_1, χ_2 et χ_3. La table de caractère a donc la forme suivante :

	C_1	C_2	C_3
χ_1	$\chi_1(C_1)$	$\chi_1(C_2)$	$\chi_1(C_3)$
χ_2	$\chi_2(C_1)$	$\chi_2(C_2)$	$\chi_2(C_r)$
χ_3	$\chi_r3(C_1)$	$\chi_3(C_2)$	$\chi_3(C_r)$

On peut comme on l'a déjà vu obtenir les deux caractères de dimension 1 :

	C_1	C_2	C_3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	n_1	n_2	n_3

On a $1^2+1^2+n_1^2 = 6$ donc $n_1 = 2$, ensuite, grâce, par exemple à l'orthogonalité des colonnes, on a :

$$1\times 1 + 1\times(-1) + 2\times n_2 = 0$$

donc $n_2 = 0$ et enfin :

$$1\times 1 + 1\times 1 + 2\times n_3 = 0$$

donc $n_3 = -1$ et on a donc :

	C_1	C_2	C_3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	1

On peut vérifier toutes les autres relations.

En général, pour déterminer la table des caractères (ou même les représentations) d'un groupe G, on peut essayer de se servir des sous-groupes normaux de G. Si N est normal dans G, on considère le groupe quotient G/N. Si l'on dispose de représentations irréductibles pour G/N, on peut se servir de la discussion suivant la remarque **??** et "remonter ces représentations" en des représentations irréductibles de G. On peut par exemple se servir du groupe dérivé de G. C'est le sous-groupe de G engendré par les commutateurs $[g_1, g_2] := g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ (pour $(g_1, g_2) \in G^2$). Ce sous-groupe possède en effet des propriétés remarquables :

1. Il est normal dans G (car $g[g_1, g_2]g^{-1} = [gg_1g^{-1}, gg_2g^{-1}]$ pour $(g_1, g_2, g) \in G^3$
2. le groupe $G/D(G)$ est abélien : si $(g_1, g_2) \in G^2$, on a :

$$\begin{array}{rcl} g_1 D(G) g_2 D(G) & = & g_1 g_2 D(G) \\ & = & g_1 g_2 g_2^{-1} g_1^{-1} g_2 g_1 D(G) \\ & = & g_2 g_1 D(G) \end{array}$$

3. C'est en fait le plus petit sous-groupe normal de G ayant cette propriété de commutativité

L'intéret ici est que l'on connait parfaitement les représentations de $G/D(G)$ puisqu'il est abélien. On peut donc les remonter pour obtenir un certain nombre de représentations de G. Par contre, elles seront toutes de dimension 1 (voir la section 1.3) et on ne peut espérer obtenir des représentations de plus grande dimension à l'aide ce sous-groupe.

2.6 Exercices

Exercice 2.6.1 :
Montrer que si toutes les représentations irréductibles d'un groupe G sont de dimension 1 alors G est abélien.

{exonb}

Exercice 2.6.2 :
Le but de cet exercice est de montrer que le degré d'une représentation irréductible divise l'ordre du groupe. On rappelle qu'un élément de $\mathbb{C}$ est dit entier algébrique si il est racine d'un polynôme unitaire à coefficient dans $\mathbb{Z}$.

1. Montrer qu'un entier algébrique dans $\mathbb{Q}$ est en fait dans $\mathbb{Z}$.
2. Le but de cette première partie est de montrer que l'ensemble des entiers algébriques forme un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
   (a) Soit x est un entier algébrique. Montrer que $\mathbb{Z}[x]$ est un groupe abélien de type fini et que $x\mathbb{Z}[x] \subset \mathbb{Z}[x]$.
   (b) Soit $M \subset \mathbb{C}$ un sous-groupe de $\mathbb{C}$ (pour l'addition donc) non nul et de type fini. Soit $x \in \mathbb{C}$ tel que $xM \subset M$. Montrer que x est un entier algébrique.
   (c) Montrer que l'ensemble des entiers algébrique forme un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
   (d) Montrer que les images des caractères d'un groupe fini G sont des entiers algb́riques.
3. Soit C une classe de conjugaison d'un groupe fini G. On pose

(a) Soit (ρ, V) une représentation irréductible de G. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $v \in V$, on a $(\sum_{g \in G} \rho(g))(v) = \lambda v$.

(b) Montrer que $\lambda = |C|\chi(g)/\chi(1)$ où χ est le caractère de (ρ, V) et $g \in C$.

(c) Montrer que λ est valeur propre de la matrice $\sum_{g \in C} \rho_{reg}(g)$ où ρ_{reg} désigne la représentation régulière.

(d) Montrer que λ est un entier algébrique.

4. Soit (ρ, V) une représentation irréductible de G. de caractère χ.

(a) Montrer que pour tout $g \in G$, l'élément

$$|C|\frac{\chi(g)}{\chi(1)}$$

est un entier algébrique.

(b) En déduire que

$$\frac{|G|}{\dim(V)(\chi, \chi)}$$

l'est également et conclure.

Exercice 2.6.3 :
On considère le groupe $\mathbb{H}_8$ dit groupe quaternionique :

$$\mathbb{H}_8 := \{1, -1, i, j, k, -i = (-1).i, -j = (-1)j, -k = (-1)k\}$$

où la loi est donnée par

$$(-1)^2 = 1, i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k = -ji$$

on admet que ceci confère bien à $\mathbb{H}_8$ une structure de groupe

1. Montrer que $\mathbb{H}_8$ possède un sous groupe distingué avec $\{\pm 1\}$.
2. Déterminer le quotient H de $\mathbb{H}_8$ par ce sous-groupe distingué.
3. Déterminer les classes de conjugaison de $\mathbb{H}_8$.
4. Trouver sa table de caractères.

Exercice 2.6.4 :
Soit G un groupe fini.

1. Soit G un groupe fini. Montrer que G a au moins une représentation fidèle.
2. Si ρ est une représentation de G de caractère χ, montrer que

$$\mathrm{Ker}(\rho) = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$$

3. (a) Montrer que l'intersection des noyaux de toutes les représentations irréductibles de G est $\{1\}$.

(b) Montrer que tout sous-groupe normal H de G peut s'écrire comme une intersection de noyaux de représentations irréductibles de G

(c) En déduire que G est simple si et seulement si toutes ses repréesentations irréductibles non triviales sont fidèles.

4. Montrer que G est simple si et seulement si pour tout caract'ere irréductible $\chi \neq 1$, et pour tout $x \in G \setminus \{1\}$, on a $\chi(x) \neq \chi(1)$.

Exercice 2.6.5 :
Faire la table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ et de A_4.

Exercice 2.6.6 :
Le groupe diédral D_4 est un groupe d'ordre 8 engendreé par w d'ordre 4 et s d'ordre 2 avec $sws^{-1} = w^{-1}$. Faire sa table des caractères. Que remarque t-on ?

Chapitre 3

Groupe dual et transformée de Fourier

La théorie de Fourier concerne essentiellement l'analyse de fonctions. Le but est ici de décortiquer des données complexes portées par une fonction et de les rendre aussi simple que possible. La transformée de Fourier est donc avant tout un outil d'analyse mais le cadre des groupes finis se révèle particulièrement intéssant et se trouve lié en partie avec la théorie expliquée dans ce cours. On cherchera donc ici à étudier des fonctions d'un groupe fini G dans le corps des nombres complexes.

3.1 Définition

Revenons à la définition d'algèbre de groupes donnée dans la section 1.4. Dans cette partie nous travaillerons sur le corps $\mathbb{C}$. On rappelle que $\mathbb{C}[G]$ est $\mathbb{C}$-algèbre de base $\{e_g \mid g \in G\}$ où les vecteurs de la base sont soumis aux relations

$$e_g e_{g'} = e_{gg'} \quad \forall g, g' \in G.$$

On a vu aussi que $\mathbb{C}[G]$ s'identifie naturellement à l'algèbre des fonctions de G dans $\mathbb{C}$. Une fonction $f : G \to \mathbb{C}$ correspond à un élément $\sum_{g \in G} f(g) e_g$. Comme chaque élément $\sum_{g \in G} a_g e_g \in \mathbb{C}[G]$ s'identifie à une fonction $f : G \to \mathbb{C}$ telle que $g(f) = a_g$ pour tout $g \in G$, cette correspondance est bien bijective.

On sait que $\mathbb{C}[G]$ et, une algèbre et, à ce titre, elle a une multiplication définie ci-dessus. Le lemme suivant explicite cette multiplication dans le "monde des algèbres des fonctions".

Lemme 3.1.1 *Le produit sur $\mathbb{C}[G]$ s'identifie au produit de convolution $\star$ sur l'ensemble des fonctions. Celui-ci est défini comme suit. Soient f_1 et f_2, deux fonctions de G dans $\mathbb{C}$ alors $f_1 \star f_2$ est la fonction de G dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout $g \in G$, on a :*

$$\begin{aligned} f_1 \star f_2(g) &= \sum_{g_1 g_2 = g} f_1(g_1) f_2(g_2) \\ &= \sum_{h \in G} f_1(h) f_2(h^{-1}g). \end{aligned}$$

Preuve. Il suffit de se rappeler que la fonction f s'identifie à l'élément $\sum_{g\in G} f(g)e_g$. Ainsi, le produit de deux fonctions f_1 et f_2 s'identifie à

$$\sum_{(g_1,g_2)\in G^2} f_1(g_1)f_2(g_2)e_{g_1g_2} = \sum_{g\in G}(\sum_{g_1g_2=g} f_1(g_1)f_2(g_2))e_g$$

La fonction $f_1 \star f_2$ définie ci-dessus s'identifie elle à

$$\sum_{g\in G}(f_1 \star f_2)(g)e_g = \sum_{g\in G}(\sum_{g_1g_2=g} f_1(g_1)f_2(g_2))e_{g_1g_2}$$

d'où le résultat. ∎

Le produit de convolution ci-dessus est a priori beaucoup plus complexe que le produit classique (c'est à dire termes à termes) de deux fonctions . En particulier, on voit qu'il dépend intimement de la structure de groupe de G. Le résultat ci-dessus montre que $\mathbb{C}[G]$ a une structure d'algèbre pour ce produit de convolution.

Donnons nous une représentation de degré 1. Dans ce cas, la représentation se confond avec son caractère. On dit que le caractère

$$\chi : G \to \mathbb{C}^\times$$

est multiplicatif (c'est donc un morphisme de groupes). Notons que celui-ci définit ainsi une fonction

$$\widetilde{\chi} : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}^\times$$

où on a prolongé χ par linéarité en demandant que :

$$\widetilde{\chi}(\sum_{g\in G} a_g e_g) = \sum_{g\in G} a_g \chi(g).$$

(Afin de ne pas surcharger les notations, χ et $\widetilde{\chi}$ seront confondus à l'avenir.)

L'ensemble des caractères multiplicatifs forme un groupe pour la multiplication d'élément neutre le caractère trivial. Si χ_1 et χ_2 sont deux caractères multiplicatifs alors l'application

$$\begin{array}{ccc} G & \to & \mathbb{C}^\times \\ g & \mapsto & \chi_1(g)\chi_2(g) \end{array}$$

est aussi une représentation de G (car un morphisme de groupe), de dimension 1, et donc un caractère multiplicatif.

Définition 3.1.2 Le groupe des caractères multiplicatifs d'un groupe G s'appelle le groupe dual de G et on le note $\widehat{G}$.

Notons que comme les valeurs des caractères sont des racines de l'unité d'ordre $o(G)$, le groupe dual est un groupe fini. On peut donc étudier la théorie des représentations de ce nouveau groupe ! Considérons en particulier son algèbre de groupe $\mathbb{C}[\widehat{G}]$. Cette algèbre s'identifie naturellement aux fonctions de $\widehat{G}$ dans $\mathbb{C}$. C'est une algèbre, par définition, pour le produit de convolution $\star$ mais aussi pour le produit donné par :

$$\forall (f_1, f_2) \in \mathbb{C}[\widehat{G}],\ \chi \in \widehat{G},\ (f_1.f_2)(\chi) = f_1(\chi)f_2(\chi).$$

Bref, pour résumer, nous nous trouvons face à un groupe abélien $\mathbb{C}[G]$ sur lequel deux multiplications peuvent être définis menant à deux structures de $\mathbb{C}$-algèbres distinctes :

– le produit classique . de deux fonctions,
– le produit de convolution $\star$ provenant de la structure de groupe de G.
et d'autre part, de manière identique, nous nous trouvons face à un groupe abélien $\mathbb{C}[\widehat{G}]$ sur lequel deux multiplications peuvent être définis menant à deux structures de $\mathbb{C}$-algèbres distinctes :
– le produit classique . de deux fonctions,
– le produit de convolution $\star$ provenant de la structure de groupe de $\widehat{G}$.
La proposition suivante permet d'établir un lien entre ces structures.

Proposition 3.1.3 *Soit $f \in \mathbb{C}[G]$, on note $\widehat{f}$ la fonction de $\widehat{G}$ dans $\mathbb{C}$ (donc élément de $\mathbb{C}[\widehat{G}]$) telle que*

$$\widehat{f}: \begin{array}{ccc} \widehat{G} & \to & \mathbb{C} \\ \chi & \mapsto & \chi(f) \end{array}$$

(comme $f \in \mathbb{C}[G]$ et que χ a pour espace de départ $\mathbb{C}[G]$, ceci est bien défini.) Alors l'application

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}[G], \star) & \to & (\mathbb{C}[\widehat{G}], .) \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}$$

est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres appelé transformation de Fourier.

Preuve. On a clairement un morphisme de $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Il faut maintenant vérifier que

$$\widehat{f}.\widehat{g} = \widehat{f \star g}$$

pour tout $(f, g) \in \mathbb{C}[G]^2$. On a pour tout $\chi \in \widehat{G}$:

$$\begin{array}{rcl} \widehat{f \star g}(\chi) & = & \chi(f \star g) \\ & = & \sum_{x \in G} (f \star g)(x) \chi(e_x) \\ & = & \sum_{x \in G} (\sum_{x_1 x_2 = x} f(x_1) g(x_2)) \chi(e_x) \\ & = & \sum_{(x_1, x_2) \in G^2} f(x_1) g(x_2) \chi(e_{x_1} e_{x_2}) \\ & = & (\sum_{x_1 \in G} f(x_1) \chi(e_{x_1}))(\sum_{x_2 \in G} f(x_2) \chi(e_{x_2})) \\ & = & \chi(f) \chi(g) \\ & = & \widehat{f}(\chi) \widehat{g}(\chi) \\ & = & (\widehat{f}.\widehat{g})(\chi) \end{array}$$

■

Le résultat ci-dessus est important puisqu'il permet de relier un problème relativement complexe : calculer le produit de convolution de deux fonctions (considérés comme éléments de $\mathbb{C}[G]$) et un problème a priori moins délicat : calculer le produit terme à terme de ces deux fonctions.

3.2 Le cas abélien

Supposons dans cette partie que G est un groupe abélien d'ordre n. On sait que les caractères irréductibles sont tous associés à des représentations de dimension 1 et sont donc multiplicatifs. Il y en a exactement n et ils forment une base orthonormée $\{\chi_1,\ldots,\chi_n\}$ de $\mathbb{C}[G]$ car toute fonction est centrale dans ce cas. Pour une fonction $f\in\mathbb{C}[G]$, remarquons que l'on a :

$$\begin{aligned} f &= \sum_{1\leq i\leq n}\langle f|\ \chi_i\rangle\chi_i \\ &= \sum_{1\leq i\leq n}\sum_{g\in G} f(g)\overline{\chi_i(g)}\chi_i \\ &= \sum_{1\leq i\leq n}\sum_{g\in G} f(g)\overline{\chi_i(g)^{-1}}\chi_i^{-1} \end{aligned}$$

En effet, l'inverse d'un caractère multiplicatif est encore un caractère multiplicatif. On a :

$$\begin{aligned} f &= \sum_{1\leq i\leq n}\sum_{g\in G} f(g)\chi_i(g)\chi_i^{-1} \\ &= \sum_{1\leq i\leq n}\langle f|\ \overline{\chi_i}\rangle\chi_i^{-1} \end{aligned}$$

D'autre part, on a pour tout $i=1,\ldots,n$:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\chi_i) &= \chi_i(f) \\ &= \sum_{x\in G} f(x)\chi_i(x) \\ &= o(G)\langle f|\ \overline{\chi_i}\rangle \end{aligned}$$

On obtient donc le lemme suivant qui permet décrire la fonction f en fonction de $\widehat{f}$.

{inversion}

Lemme 3.2.1 *Soit $f\in\mathbb{C}[G]$, alors on a :*

$$f=\frac{1}{o(G)}\sum_{\chi\in\widehat{G}}\widehat{f}(\chi)\chi^{-1}=\frac{1}{o(G)}\sum_{\chi\in\widehat{G}}\widehat{f}(\chi^{-1})\chi$$

Il suit alors immédiatement :

Proposition 3.2.2 *Soit G un groupe abélien. Alors la transformation de Fourier est un isomorphisme entre $\mathbb{C}[G]$ et $\mathbb{C}[\widehat{G}]$.*

Nous pouvons préciser une remarque faite dans la section précédente : en utilisant l'isomorphisme ci-dessus, on voit que calculer le produit de convolution de deux fonctions revient exactement à calculer le produit de deux (autres) fonctions dans $\mathbb{C}[\widehat{G}]$.

3.3 Un peu de théorie du signal

Donnons ici une application de cette discussion. Avant celà, parlons un peu du contexte : la théorie du signal. Nous considérons ici des signaux temporaux à valeurs complexes, c'est à dire des fonctions :

$$\widetilde{f}:t\in\mathbb{R}\mapsto\widetilde{f}(t)\in\mathbb{C}.$$

Nous cherchons à traiter ce signal de manière numérique (et non analogique où on étudie ce signal de manière continu, sur $\mathbb{R}$) ce qui signifie que l'on ne considère qu'un nombre fini de valeurs du signal. Prenons donc un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et posons pour $n = 0, 1, \ldots, N-1$,

$$t_n = a + \frac{b-a}{N} n$$

On dit que le vecteur

$$f := (f[n] := \widetilde{f}(t_n))_{n \in [0,N-1]}$$

est un échantillon de taille N du signal original $\widetilde{f}$.

Définition 3.3.1 La transformée de Fourier discrète de l'échantillon f est le vecteur $\widehat{f} = (\widehat{f}[n])_{n\in[0,N-1]} \in \mathbb{C}^N$ avec pour $k \in [0, N-1]$:

$$\widehat{f}[k] := \sum_{n\in[0,N-1]} f[n]\omega_N^{-nk},$$

où $\omega := \exp(2i\pi/N)$.

On a ainsi une application

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{E}: & \mathbb{C}^N & \to & \mathbb{C}^N \\ & f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}$$

Où se situe le lien avec la section précédente et avec notre sujet de prédilection ? prenons le groupe cyclique G d'ordre N.On sait (voir la section 1.3) que les représentations irréductibles de G sont de dimension 1 et sont donc des caractères multiplicatifs. Précisemment, c'est l'ensemble :

$$\{\chi_1, \ldots, \chi_N\}$$

tel que

$$\forall s \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z},\ \chi_k(s) = \omega_N^{-ks}$$

On voit d'ailleurs que le dual de G est lui même cyclique d'ordre N de sorte qu'il et isomorphe à G lui-même. Maintenant, l'algèbre $\mathbb{C}[G]$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension N et est donc isomorphe à $\mathbb{C}^N$ (en tant qu'espace vectoriel). De plus, avoir un échantillon $f \in \mathbb{C}^N$ revient exactement à se donner une fonction $f_1 : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ où pour $n \in [0, N-1]$, on définit $f_1(n) = f[n]$ (en prenant les éléments de $[0, N-1]$ comme représentant pour $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$)

et donc un élément de $\mathbb{C}[G]$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} \widehat{f_1}(\chi_k) & = & \chi_k(f_1) \\ & = & \displaystyle\sum_{n\in[0,N-1]} f_1(n)\chi_k(e_n) \\ & = & \displaystyle\sum_{n\in[0,N-1]} f[n]\omega_N^{-kn} \\ & = & \displaystyle\sum_{n\in[0,N-1]} f[n]\omega_N^{-kn} \\ & = & \widehat{f}[k] \end{array}$$

Donc la transformée discrète de l'échantillon f n'est autre que la transformée de Fourier de f au sens de la dernière section ! En particulier, on peut appliquer les résultats obtenus dans la section précédente et exprimer l'échantillon f ... en fonction de $\widehat{f}$. Grâce au lemme 3.2.1, f_1 s'exprime donc en fonction de $\widehat{f_1}$ de la manière suivante :

$$f_1 = \frac{1}{N} \sum_{k \in [O, N-1]} \widehat{f_1}(\chi_k)\chi_k^{-1}$$

Soit encore, en évaluant en χ_n pour tout $n = 0, \ldots, N-1$:

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k \in [O, N-1]} \widehat{f}[k]\omega_N^{kn} \tag{3.1}$$

Remarquons enfin que l'isomorphisme d'espace vectoriel entre $\mathbb{C}[G]$ et $\mathbb{C}[\widehat{G}]$ obtenu dans la proposition n'est autre que l'application $\mathcal{E}$ où l'on a identifié de façon naturelle les espaces $\mathbb{C}[G]$ et $\mathbb{C}[\widehat{G}]$ avec $\mathbb{C}^N$. C'est donc la transformée de Fourier. Maintenant, présentons une application.

3.4 Transformé de Fourier rapide

Pour un signal f dont on connaît l'échantillon, la transformée de Fourier est

$$\widehat{f}[k] := \sum_{n \in [0, N-1]} f[n]\omega_N^{-nk}$$

Le but est de calculer aussi vite que possible cet élément, équivalent de la transformation de Fourier pour les fonctions intégrables dans le cas dit discret. Celle-ci sert à déterminer le spectre d'un signal (ie un ensemble de fréquences, caractéristique d'un son). Un autre intérêt est le suivant : comme on l'a déjà dit, il peut être difficile de calculer le produit de convolution de deux fonctions f et g. Dans le cas abélien, une possibilité est d'utiliser l'isomorphisme "transformée de Fourier" :

– On calcule les transformées de Fourier $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$,
– On fait le produit classique de $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$ dans $\mathbb{C}[\widehat{G}]$, on obtient $\widehat{h} \in \mathbb{C}[\widehat{G}]$
– On utilise l'isomorphisme inverse pour obtenir h qui n'est autre que $f \star g$.

Il est donc nécessaire d'avoir un bon algorithme pour le calcul de la transformée de Fourier. Quand on veut calculer $\widehat{f}[k]$ (comme ci-dessus), on a, a priori, besoin de faire environ $2N^2$ opérations (additions et multiplications, la valeur $\widehat{f}[k]$ étant calculée pour tout $k \in [0, N-1]$)). On voudrait proposer un algorithme qui donne un coût moindre. L'algorithme FFT (pour "Fast Fourier Transform") propose de ramener ce coût en $O(N\log(N))$.

Pour simplifier, nous allons supposer que $N = 2^p$ ce qui va nous permettre d'employer la philosophie célèbre en algorithmique "diviser pour mieux régner" (ce n'est pas une condition restrictive, il suffit d'adapter un peu l'algorithme dans le cas général, nous éviterons ici ces considérations techniques). Cette méthode consiste à décomposer les problèmes en sous-problèmes de taille inférieurs, que l'on résoud petit à petit, le plus souvent de manière récursive.

Pour $k = 0, \ldots, N-1$, on voit que :

$$\begin{array}{rcl} \widehat{f}[k] & := & \displaystyle\sum_{n\in[0,N/2-1]} f([2n])\omega_N^{-2nk} + \sum_{n\in[0,N/2-1]} f([2n+1])\omega_N^{-(2n+1)k} \\ & = & \displaystyle\sum_{n\in[0,N/2-1]} f([2n])\omega_{N/2}^{-nk} + \omega_N^{-k} \sum_{n\in[0,N/2-1]} f([2n+1])\omega_{N/2}^{-nk} \end{array}$$

On considère alors les deux échantillons suivants :

$$f^0 := \{f[0], f[2], \ldots, f[N-2]\}, \qquad f^1 := \{f[1], f[3], \ldots, f[N-1]\}$$

On a alors :

$$\widehat{f}[k] = \widehat{f^0}[k] + \omega_N^{-k}\widehat{f^1}[k]$$

pour $k = 0, \ldots, N/2-1$. On en revient donc à calculer deux transformées de Fourier associées à des échantillons de tailles 2^{p-1}. L'algorithme associé est un algorithme récursif. Quel est son coût ? si on note $C(N)$ le nombre d'opérations nécessaires, on a l'égalité :

$$C(N) = 2C(N/2) + N$$

Nous avons en effet N sommes à effectuer et des transformée de Fourier attachées à des échantillons de taille $N/2$ à calculer. En posant $N = 2^p$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} C(N) & = & 2C(N/2) + N \\ & = & 2(2C(2^{p-2}) + 2^{p-1}) + 2^p \\ & = & 2^2C(2^{p-2}) + 2.2^p \\ & = & \ldots \\ & = & 2^pC(2^0) + p2^p \\ & = & NC(1) + N\log(N) \end{array}$$

On voit que le coût est bien en $O(N\log(N))$.

Remarque 3.4.1 Dans la procédure évoquée plus haut pour le calcul du produit de convolution, il est nécessaire de calculer une transformée de Fourier inverse. On peut remarquer qu'en remplaçant ω_N par ω_N^{-1} et en divisant le résultat par N, on peut obtenir cette inverse en utilisant l'algorithme ci-dessus (voir la formule 3.1).

Chapitre 4

Applications

Nous présentons dans ce dernier chapitre quelques approfondissements de la théorie des représentations et certaines applications à la théorie des groupes. Les deux premiers résultats sont des applications à la théorie des groupes, le troisème ne nécessite pas à promptement parlé de théorèmes fondamentaux que nous avons vu mais le langage des représentations y est primordial.

4.1 Le théorème de Burnside

On rappelle que l'on dit qu'un groupe G est résoluble si il existe une suite finie de sous-groupes

$$G_0 = \{e_G\} \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n = G,$$

où pour tout $i = 1, \ldots, n-1$, G_i est un sous-groupe normal de G_{i+1} et tel que les groupes quotients G_{i+1}/G_i sont abéliens. La définition de ces groupes vient de la recherche de solutions pour les racines de polynômes de degré 5 ou plus.

Un cas particulier de tels groupes est donné par la classe des groupes dits nilpotents. Pour G un groupe, on définit des sous-groupes $Z_i(G)$ de G par récurrence en posant tout d'abord :

$$Z_0(G) = \{e\},\ Z_1(G) = Z(G)$$

Ensute, $Z_{i+1}(G)$ est l'unique sous-groupe de G contenant $Z_i(G)$ tel que $Z_{i+1}(G)/Z_i(G) = Z(G/Z_i(G))$. Un groupe est dit nilpotent si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $Z_n(G) = G$. Par exemple, on a :

Proposition 4.1.1 *Tout p-groupe est nilpotent.*

Preuve. Soit G un p-groupe. Soit $i \geq 1$ tel que $Z_{i-1}(G) \neq G$ alors $G/Z_{i-1}(G)$ est un p-groupe non réduit à l'élément neutre. Son centre est non trivial (en tant que p-groupe, c'est une conséquence classique de l'équation des classes appliquée à l'action de G sur lui-même par conjugaison). Or, on a $Z(G/Z_{i-1}(G)) = Z_i(G)/Z_{i-1}(G)$ donc $Z_{i-1}(G)$ est contenu et distinct de $Z_i(G)$. Il existe donc nécessairement un i tel que $Z_{i-1}(G) = G$ sinon la suite des $Z_i(G)$ serait strictement croissante ce qui est impossible pour un groupe fini. ■

Proposition 4.1.2 *Tout groupe nilpotent est résoluble.*

Preuve. C'est évident, il suffit de prendre la suite $G_i = Z_i(G)$ pour $i = 1, \ldots, n$.
■

Nous allons prouver qu'une certaine classes de groupe est résoluble : ceux d'ordre $p^\alpha q^\beta$ où p et q sont des nombres premiers et α et β des entiers positifs ou nuls. L'idée est de raisonner par récurrence et utiliser le résultat suivant :

{suite}

Proposition 4.1.3 *Soit G un groupe et H un sous groupe normal de G. Si H et G/H sont résolubles alors G l'est aussi.*

Preuve. Si G/H est résoluble c'est qu'il existe sune suite finie de sous-groupes

$$\widetilde{G}_0 = \{e_{G/H}\} \subset \widetilde{G}_1 \subset \ldots \subset \widetilde{G}_n = G/H,$$

où pour tout $i = 1, \ldots, n-1$, $\widetilde{G}_i$ est un sous-groupe normal de $\widetilde{G}_{i+1}$ et tel que les groupes quotients $\widetilde{G}_{i+1}/\widetilde{G}_i$ sont abéliens. Soit $\pi : G \to G/H$ la surjection canonique. Les groupes $\pi^{-1}(\widetilde{G}_i)$ sont des sous-groupes de G qui contiennent H et on a :

$$\pi^{-1}(\widetilde{G}_0) = H \subset \pi^{-1}(\widetilde{G}_1) \subset \ldots \subset \pi^{-1}(\widetilde{G}_n) = G$$

On vérifie immédiatement que $\pi^{-1}(\widetilde{G}_i)$ est normal dans $\pi^{-1}(\widetilde{G}_{i+1})$ et que les quotient sont abéliens (car isomorphes aux G_{i+1}/G_i. On regroupe alors les deux suites pour conclure
■

On commence par des petites propriétés concernant les entiers algébriques. Rappelons que si z est un entier algébrique alors il est racine d'un polynôme à coefficient dans $\mathbb{Z}$.

{burnp}

Proposition 4.1.4 *On a les propriétés suivantes.*

1. *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ des racines de l'unité. Si $(\lambda_1 + \ldots + \lambda_r)/n$ est un entier algébrique alors soit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_r = 0$ soit tous les λ_i sont égaux.*
2. *Soit χ un caractère irréductible de degré n de G et soit $s \in G$. On note $C(s)$ la classe de conjugaison de G à laquelle s appartient et on suppose que $\sharp C(s)$ et n sont premiers entre eux.*
   (a) *$\chi(s)/n$ est un entier algébrique.*
   (b) *Si on a $\chi(s) \neq 0$ alors $\rho(s)$ est une homothétie.*

Preuve.

1. Posons $z = (\lambda_1 + \ldots + \lambda_r)/n$. z est un entier algébrique donc il admet un polynôme minimal P qui est unitaire et à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Chaque racine de l'unité admet comme conjugués (qui sont par définition les autres racines de son polynôme minimal) d'autres racines de l'unités. Donc les conjugués possibles de z sont de la forme $(\lambda'_1 + \ldots + \lambda'_r)/n$ où les λ'_i sont des racines de l'unité.

   Donc z et ses conjugués sont de modules plus petit que 1, donc leur produit Z vérifie $|Z| \leq 1$. Mais le produit est le terme constant du polynôme minimal, il est dans $\mathbb{Z}$ et donc il est donc égal à 0, 1 ou -1. Si $|Z| = 0$ alors un des conjugués est nul et donc $z = 0$ (le polynôme minimal est nécessairement X dans ce cas) et si $|Z| = 1$, tous les conjugués sont de modules 1 et tous les λ_i sont donc égaux à 1 (ou -1).

2. Si $\sharp C(s)$ et n sont premiers entre eux, d'après Bézout, il existe a et b dans $\mathbb{Z}$ tel que
$$a\sharp C(s) + bn = 1$$
On a donc
$$\frac{\chi(s)}{n} = \frac{a\chi(s)\sharp C(s)}{n} + b\chi(s)$$
Maintenant, $\chi(s)$ est un entier algébrique d'apres la remarque 2.1.4 et d'apres l'exercice 2.6.2, $\dfrac{a\chi(s)\sharp C(s)}{n}$ est aussi un entier algébrique. Donc $\chi(s)/n$ est un entier algébrique.
Enfin, les valeurs propres de $\rho(s)$ sont des racines de l'unité λ_i (car G est fini) et donc $\chi(s)/n$ est la somme de ces valeurs propres divisée par n et c'est un entier algébrique. On conclut avec le 1. : on obtient que $\rho(s) = \lambda.\mathrm{Id}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$

■

Proposition 4.1.5 *Soit s un élément de G différent de l'élément neutre et soit p un nombre premier. Soit $C(s)$ la classe de conjugaison à laquelle appartient s. Supposons que $\sharp C(s)$ soit une puissance de p. Alors il existe un sous-groupe normal N de G distinct de G tel que $\pi(s) \in Z(G/N)$ où $\pi : G \to G/N$ est la surjection canonique.*

Preuve. Soit χ le caractère de la représentation régulière de G. On a $\chi(s) = 0$ car $s \neq e_G$. On sait aussi (proposition 2.4.5) que si $\{\chi_1, \ldots, \chi_r\}$ forme l'ensemble des caractères irréductibles de G, on a :
$$\chi = \sum_{1 \leq i \leq s} (\chi, \chi_i)\chi_i$$
mais on sait que (χ, χ_i) est la dimension de la représentation associée à χ_i, on a donc :
$$\chi = \sum_{1 \leq i \leq s} \chi_i(e_G)\chi_i$$
(les valeurs $\chi_i(e_G)$ correspondent en effet aux dimensions des représentations associées). En évaluant en s puis en sortant le caractère triviale χ_1 et enfin en divisant par p, il suit :
$$\sum_{2 \leq i \leq s} \frac{\chi_i(e_G)\chi_i(s)}{p} = -\frac{1}{p}$$
Maintenant, on sait que $\dfrac{1}{p}$ n'est pas un entier algébrique (les seuls entier algébriques de $\mathbb{Q}$ sont dans $\mathbb{Z}$). Comme l'ensemble de tels éléments est un anneau, il suit qu'il existe un caractère irréductible χ_i non trivial tel que $\dfrac{\chi_i(e_G)\chi_i(s)}{p}$ n'est pas un entier algébrique.

Ceci implique que $\chi_i(s)$ est non nul. De plus, p ne divise pas la dimension $\chi_i(e_G)$ (dans $\mathbb{Z}$) sinon ce nombre serait le produit de deux entiers algébriques. Comme $\sharp C(s)$ est une puissance de p, on en déduit que $\sharp C(s)$ et $\chi_i(e_G)$ sont premiers entre eux. Maintenant d'après la proposition 4.1.4, $\rho(s)$ est une homothétie. Si on considère le noyau N de ρ_i, on a donc un sous-groupe normal disctinct de G (χ_i est non triviale). Alors G/N est isomorphe à l'image de ρ dans $GL_n(\mathbb{C})$. Comme $\rho_i(s)$, qui est une homothétie, est dans le centre de cette image, $\pi(s)$ est dans le centre de G/N. ■

On en vient au théorème principal :

Théorème 4.1.6 (Burnside) *Tout groupe d'ordre $p^\alpha q^\beta$ avec p et q premier est résoluble.*

Preuve. On raisonne par récurrence sur $o(G)$. Si α ou β est nul, alors G est un p-groupe. Un tel groupe est nilpotent donc résoluble. Supposons donc α et β non nul. Remarquons que si le centre de G est non trivial alors G est abélien (si ce centre est G lui-même) ou on peut appliquer la proposition 4.1.3 ce qui permet de conclure dans les deux cas. Soit $C_0 = \{1\}, C_1, \ldots, C_k$ les classes de conjugaisons de G, on a :

$$o(G) = 1 + \sum_{1 \leq i \leq k} \sharp C_i$$

Comme q divise $o(G)$, il existe $s \in G$ tel que la classe de conjugaison de s, C_j avec $j \in \{1, \ldots, k\}$ n'est pas divisible par q. Donc $\sharp C_j$ est une puissance de p (ce nombre est égal à l'indice d'un stabilisateur dans G, en considérant une action par conjugaison, il divise donc l'ordre de G). On sait donc qu'il existe un sous-groupe normal N distinct de G tel que l'image de s dans G/N est dans le centre de G/N.

- Si $N = \{e_G\}$ alors le centre de G est non trivial et c'est fini.
- sinon on applique la récurrence à N et G/N, de même non triviale.

On conclut en utilisant la proposition 4.1.3. ■

4.2 Le théorème de Frobenius

Dans cette section, on suppose que G est un groupe fini et que H est un sous-groupe de G tel que pour tout $g \in G \setminus H$, on a :

$$H \cap gHg^{-1} = \{e_G\}$$

Le but de cette section est de montrer :

Théorème 4.2.1 *Soit $N = \{e_G\} \cup (G \setminus \cup_{g \in G} gHg^{-1})$. Alors N est un sous-groupe normal de G.*

Ceci permet donc de construire un sous groupe normal de G.

Lemme 4.2.2 *Soit f une fonction centrale sur H. Il existe une unique fonction centrale $\widetilde{f}$ sur G telle que*

1. *$\widetilde{f}$ prolonge f,*
2. *$\widetilde{f}(x) = f(1)$ si $x \in N$*

Preuve. Comme d'habitude, ceci se montre en deux temps :

- *Unicité :* Supposons $x \notin N$ alors il existe $g \in G$ et $h \in H$ tel que $x = ghg^{-1}$. Alors $\widetilde{f}(x) = f(h)$.

- *Existence :* Pour $x \in N$, on pose donc $\widetilde{f}(x) = f(1)$ et pour $x \notin N$, il existe $g \in G$ et $h \in H$ tel que $x = ghg^{-1}$. Alors on pose $\widetilde{f}(x) = f(h)$. Ceci est bien défini.

■

Dans le lemme suivant, on note $\langle f, g\rangle_G$ pour le produit scalaire relatif au groupe G (où donc f et g sont deux fonctions de G dans $\mathbb{C}$) et $\langle f, g\rangle_H$ pour le produit scalaire relatif au groupe H (où donc f et g sont deux fonctions de H dans $\mathbb{C}$).

Lemme 4.2.3 *Soient f et $\widetilde{f}$ comme dans le lemme ci-dessus. Soit θ une fonction centrale sur G alors :*

$$\langle \widetilde{f}, \theta\rangle_G = \langle f, \theta\rangle_H + f(1)\langle 1, \theta\rangle_G - f(e_G)\langle 1, \theta\rangle_H$$

Preuve. Supposons que f est la fonction constante f_{triv} égale à 1 alors l'égalité est vérifiée car $\widetilde{f_{\text{triv}}}$ est alors constante égale à 1. Posons $f_1 = f - f(e_G)f_{triv}$ qui est aussi centrale, on a $f_1(e_G) = 0$. De plus la fonction $\widetilde{f} - f(e_G)\widetilde{f_{\text{triv}}}$ prolonge f_1. Si la formule est vrai pour f_1, elle l'est aussi pour f et on peut donc supposer que f s'annule en e_G. Soit $\mathcal{R}$ un système de représentants des classes à gauche des éléments de G modulo H.

Un élément x de G est un conjugué d'un élément de H si et seulement si il existe $h \in H$ et $g \in G$ tels que $x = ghg^{-1}$. Mais $g = r.h_1$ avec $r \in \mathcal{R}$ et $h_1 \in H$ donc on a peut en fait supposer $g \in \mathcal{R}$. Mieux : cette écriture est unique. Si $rhr^{-1} = r_1h_1r_1^{-1}$ pour $(r, r_1) \in \mathcal{R}^2$ et $(h_1, h) \in H^2$, h et h_1 sont conjugués ce qui est exclus par hypothèse. Comme $\widetilde{f_1}$ est nulle en dehors des conjugués d'éléments de H, on a :

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{f}, \theta\rangle_G &= \frac{1}{o(G)} \sum_{g\in G} \widetilde{f}(g^{-1})\overline{\theta(g)} \\ &= \frac{1}{o(G)} \sum_{(r,h)\in\mathcal{R}\times H} \widetilde{f}(h^{-1})\overline{\theta(h)} \\ &= \langle f, \theta\rangle_H \end{aligned}$$

■

Proposition 4.2.4 *On a les propriétés suivantes.*

1. *Si χ est un caractère de H et θ un caractère de G alors $\langle \widetilde{\chi}, \theta\rangle_H$ est un entier.*
2. *Si χ est un caractère irréductible alors $\widetilde{\chi}$ est un caractère irréductible de G.*
3. *Si χ est un caractère alors $\widetilde{\chi}$ est un caractère de G.*

Preuve. On utilise la proposition précédente :

$$\langle \widetilde{\chi}, \theta\rangle_G = \langle \chi, \theta\rangle_H + \chi(1)\langle 1, \theta\rangle_G - f(e_G)\langle 1, \theta\rangle_H$$

Le terme de droite est un entier donc le terme de gauche aussi (voir la remarque 2.2.7).

Maintenant, $\widetilde{\chi}$ est une fonction de trace sur G donc en décomposant sur la base $\{\chi_1, \dots, \chi_k\}$ des fonctions centrales de G , on a $\widetilde{\chi} = \sum_{1\leq i\leq k} c_i\chi_i$ pour des nombres complexes c_i. Mais ces nombres sont en fait des entiers d'après ce qui précède. On a :

$$\langle \widetilde{\chi}, \widetilde{\chi} \rangle_G = \langle \chi, \chi \rangle_H + \chi(e_G)\langle 1, \widetilde{\chi} \rangle_G - \chi(e_G)\langle 1, \chi \rangle_H$$

Montrons que $\langle 1, \widetilde{\chi} \rangle_H = \langle 1, \widetilde{\chi} \rangle_G$. Pour ceci, nous gardons les notations comme dans la preuve de la proposition précédente. Tout d'abord, On sait que dans G, on a une réunion disjointe entre les éléments de N et les conjugués des éléments de H distincts de l'élément neutre. Ceci nous donne l'égalité

$$o(G) = o(N) + (o(H) - 1)\sharp\mathcal{R}$$

et donc, comme $o(G) = o(H)\sharp\mathcal{R}$, on a $o(N) = \sharp\mathcal{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\langle 1, \widetilde{\chi} \rangle_G &= \frac{1}{o(G)}\Big(\sum_{(r,h)\in\mathcal{R}\times H, h\neq e_G} \chi(h) + \sum_{h\in N} \chi(h)\Big) \\
&= \frac{1}{o(G)}\Big(\sum_{(r,h)\in\mathcal{R}\times H, h\neq e_G} \chi(h) + \chi(e_G)\sharp\mathcal{R}\Big) \\
&= \frac{1}{o(G)}\Big(\sum_{(r,h)\in\mathcal{R}\times H} \chi(h)\Big) \\
&= \langle 1, \widetilde{\chi} \rangle_H
\end{aligned}$$

On a donc $\langle \chi, \chi \rangle_H = \langle 1, \widetilde{\chi}, \widetilde{\chi} \rangle_G = \sum c_i^2 = 1$ et donc tous les c_i qui sont entiers sont nuls sauf un égal à 1 (si il était égal à -1 la valeur du caractère en 1 serait négative, absurde). Donc c'est bien un caractère irréductible.

Si χ est un caractère, on peut le décomposer comme somme de caractères irréductibles χ_i de H. La fonction centrale $\widetilde{\chi}$ de G est alors une somme de caractères irréductibles $\widetilde{\chi}_i$ de G d'après ce qu'on a fait ci-dessus, c'est donc bien un caractère de G.

■

On peut maintenant terminer la démonstration. Soit (ρ, V) la représentation régulière de H. On sait qu'elle est fidèle. On considère le caractère $\widetilde{\chi}$ associé sur G, il est donc affilié à une représentation de G noté $\widetilde{\rho}$.

Si $s \neq e_G$ est conjugué à un élément de H alors $\widetilde{\rho}(s) \neq 1$, d'autre part, si $s \in N$, on a $\widetilde{\chi}(s) = \chi(1) = \widetilde{\chi}(1)$. Si on note $\lambda_1, \ldots \lambda_r$, les valeurs propres de $\rho(s)$, ce sont des racines de l'unité de somme totale la dimension, ces valeurs propres sont donc égale à 1 et $\widetilde{\rho}(s) = 1$. On a donc $N = \ker(\widetilde{\rho})$ ce qui montre que ce sous-groupe est normal.

4.3 Le théorème de Molien

Dans cette partie, G est un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$. On note V_s le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ constitué des polynômes homogènes de degré s. Le groupe G agit sur cet espace vectoriel de la façon suivante. Soit $A \in G$, on note $A^{-1} = (a_{i,j})_{1\leq i,j,\leq n}$. Pour $X = (X_1, \ldots, X_n)$ et $P(X) \in V_s$, le polynôme $\rho_s(A)(P(X))$ est alors le polynôme obtenu à partir de P en substituant chaque X_i à $\sum_{1\leq j\leq n} a_{j,i}X_i$. On note ce polynôme $P(A^{-1}X)$. On voit qu'un tel polynôme est encore homogène de degré s. On a donc une représentation :

$$\rho_s : G \to GL(V_s)$$

qui est de dimension finie. On cherche à déterminer la dimension des sous-espaces invariants V_s^G sous l'action de G. Pour ceci, on écrit la série formelle de Molien :

$$\Phi(t) = \sum_{s \geq 0} \dim(V_s^G) t^s$$

Le but de cette section est de montrer le résultat suivant :

Théorème 4.3.1 *On a :*

$$\Phi(t) = \frac{1}{|G|} \sum_{A \in G} \frac{1}{\det(I - tA)}$$

On commence par le lemme suivant :

Lemme 4.3.2 *Pour tout $s \geq 0$, on a*

$$\dim(V_s^G) = \frac{1}{|G|} \sum_{A \in G} \chi_s(A)$$

où χ_s désigne le caractère de ρ_s

Preuve. On considère l'opérateur suivant :

$$R_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_s(g)$$

connu sous le nom d'opérateur de Reynolds. Nous allons montrer que c'est un projecteur de V_s sur V_s^G.

– On a pour $h \in G$

$$\begin{aligned} R_G \circ \rho_s(h) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(gh) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \\ &= R_G \end{aligned}$$

Il suit que $R_G^2 = R_G$

– Si $x \in V_s^G$ alors $R_G(x) = x$ et si $x = R_G(y) \in \mathrm{Im}(R_G)$ alors pour tout $g \in G$, on a $\rho_s(g)(y) = y$ donc $y \in V_s^G$

Donc R_G est un projecteur sur V_s^G. En utilisant une base adaptée à son image et noyau, on voit que la trace de R_G est égal à la dimension de V_s^G. D'autre part, par linéarité de la trace, cette trace est égale à $\frac{1}{G} \sum_{A \in G} \chi_s(A)$ ■

On pourrait s'arrêter là car on a ici une formule pour la dimension recherchée. Cependant, celle-ci demande le calcul de la trace de $\rho_d(A)$. Il faut donc trouver une base acceptable pour V_s et tenter de trouver la matrice associée ce qui peut se révéler fastidieux.

Lemme 4.3.3 *Pour tout $A \in G$, on a l'égalité des séries formelles suivantes.*

$$\frac{1}{\det(I - tA)} = \sum_{s \geq 0} \chi_s(A^{-1}) t^s$$

Vu comme série entière, le deuxième terme a un rayon de convergence d'au moins 1.

Preuve. G étant fini, $X^{|G|}-1$ est un polynôme annulateur pour tous les éléments de G. Comme ce polynôme est scindé, tout élément de G est diagonalisable avec des valeurs propres qui sont des racines de l'unité. Soit $A \in G$ de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\det(I-tA)} &= \prod_{1\leq i\leq n} \frac{1}{1-t\lambda_i} \\ &= \prod_{1\leq i\leq n} \sum_{k\geq 0} \lambda_i^k t^k \end{aligned}$$

le rayon de convergence des séries impliquées est au moins 1 et on peut appliquer le produit de Cauchy (voir la remarque 4.3.4 ci-dessous) :

$$\frac{1}{\det(I-tA)} = \sum_{k\geq 0}\Big(\sum_{k_1+\ldots+k_n=k} \lambda_1^{k_1}\ldots\lambda_n^{k_n}\Big)t^k$$

et le rayon de convergence est donc d'au moins 1.

Maintenant, soit $A \in G$ et soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ qui diagonalise A. On va chercher une base convenable de V_s. Une est donnée par les monômes de degré s. Ecrivons la décomposition de ces vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$:

$$v_i = \sum_{1\leq j\leq n} \mu_{ij} e_j$$

On a donc $A = PDP^{-1}$ où D est la matrice diagonale et P^{-1} la matrice des μ_{ij}. On pose alors $V_i = \sum_{1\leq j\leq n} \mu_{ij} X_j$. On montre alors facilement que $(V_1^{k_1}\ldots V_n^{k_n})_{k_1+\ldots+k_n=s}$ est une base de C_s (car les X_j sont aussi combinaison linéaires des V_i). On obtient

$$\begin{aligned} A.V_i &= \sum_{1\leq j\leq n} \mu_{ij} A X_j \\ &= \sum_{1\leq j\leq n}\sum_{1\leq t\leq n} \mu_{ij} a_{jt} X_t \\ &= \sum_{1\leq t\leq n}\Big(\sum_{1\leq j\leq n} \mu_{ij} a_{jt}\Big) X_t \\ &= \sum_{1\leq t\leq n} (DP^{-1})_{it} X_t \\ &= \sum_{1\leq t\leq n} \lambda_i \mu_{it} X_t \\ &= \lambda_i V_i \end{aligned}$$

Les V_i sont donc une base de vecteurs propres pour $\rho_s(A^{-1})$. Finalement, on a :

$$\begin{aligned} \rho_s(A^{-1})(V_1^{k_1}\ldots V_n^{k_n}) &= \rho_s(A^{-1})(V_1^{k_1})\ldots\rho_s(A^{-1})(V_n)^{k_n} \\ &= (\lambda_1 V_1)^{k_1}\ldots(\lambda_n V_n)^{k_n} \\ &= \lambda_1^{k_1}\ldots\lambda_n^{k_n} V_1^{k_1}\ldots V_n^{k_n} \end{aligned}$$

On a donc trouvé les valeurs propres de $\rho_s(A^{-1})$. En calculant la trace, on obtient

$$\sum_{k\geq 0}\Big(\sum_{k_1+\ldots+k_n=k} \lambda_1^{k_1}\ldots\lambda_n^{k_n}\Big)t^k$$

ce qui permet de conclure ■

{cauchy}

Remarque 4.3.4 Le produit de Cauchy des séries $\sum_{k\geq 0} a_k$ et $\sum_{k\geq 0} b_k$ de nombres complexes est la série de terme général

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Si les deux première série converge absolument, cette série converge absolument, et on peut écrire la formule de distributivité généralisée

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j\right)$$

Bibliographie

[1] Y. Kosmann-Schwarzbach, Groupes et symétries : Groupes finis, groupes et algèbres de Lie, représentations, Editions de l'école polytechnique.

[2] G. Peyré, L'algèbre discrète de la transformée de Fourier, Ellipses.

[3] J-P Serre, Représentations linéaires des groupes finis, Hermann.

[4] J-P Serre, Groupes finis, Cours au Collège de France, http://www.college-de-france.fr/media/jean-pierre-serre/UPL2937151343298039815_1___Groupes_finis.pdf

[5] JB Zuber, Introduction 'a la théorie des groupes et de leurs représentations, http://cel.archives-ouvertes.fr/docs/00/09/29/68/PDF/cel-41.pdf