Groupes de réflexions finis et algèbres de Iwahori-Hecke

Nicolas Jacon

18 janvier 2011

Table des matières

Chapitre 1

Groupes de Réflexions

Le prototype du groupe de réflexions est le groupe symétrique. Ce groupe peut être réalisé comme sous-groupe du groupe linéaire sur un espace euclidien V où chaque transposition correspond à une matrice de permutation. Nous allons ici généraliser cette définition pour aboutir à celle des groupes de réflexions. Le but du chapitre sera ensuite d'étudier la structure de ces groupes et de développer une combinatoire permettant de les étudier de façon aisée. Nous donnerons ensuite une présentation de ceux ci par générateurs et relations, c'est à dire un moyen particulièrement simple de les définir entièrement. Cette présentation sera ensuite très utile lorsqu'il s'agira de les "déformer" afin de définir leurs algèbres de Iwahori-Hecke dans le chapitre suivant. Enfin, nous donnons une classification de ce type de groupes en exhibant les différentes familles à laquelle un groupe de réflexions (irréductible) peut appartenir.

Ce chapitre est hautement inspiré de la partie §64 du livre de Curtis et Reiner [4] ainsi que du livre de Geck et Pfeiffer [9]. On citera aussi Bourbaki [2] et le livre d'Humphreys comme autre référence [10]. Enfin, le polycopié de Jean Michel [13] étudie une généralisation de ces groupes de réflexions : les groupes de réflexions complexes.

1.1 Définitions et premiers exemples

Soit V un espace euclidien réel c'est à dire un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, une forme bilinéaire

$$(\ , \ ) : V \times V \to \mathbb{R}$$

symétrique et définie positive. On note

$$O(V) = \{s \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V) \mid \forall \xi, \eta \in V,\ (s(\xi), s(\eta)) = (\xi, \eta)\}$$

le groupe des transformations orthogonales de V.

Définition 1.1.1. Une réflexion $s \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ est un élément de $O(V)$ tel que $s \neq 1$ et tel que s fixe chaque élément d'un hyperplan de V.

La proposition suivante nous donne la forme explicite d'une réflexion en fonction du produit scalaire :

Proposition 1.1.2. *Pour toute hyperplan H de V, il existe une unique réflexion fixant les éléments de H. De plus, si $\alpha \in H^{\perp}$, on a :*
- $s^2 = 1$
- *Pour tout $\xi \in V$, $s(\xi) = \xi - 2\dfrac{(\xi, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$.*

Démonstration. Soit $\alpha \in H^\perp$, on a alors $V = H \oplus \langle\alpha\rangle$. De plus, s est l'identité sur H et comme $s \in O(V) \subset GL(V)$, on a $s(\alpha) \in H^\perp$. Or $H^\perp$ est de dimension 1 donc $s(\alpha) = t\alpha$ pou $t \in \mathbb{R}$ et la formule $(s(\alpha), s(\alpha)) = (\alpha, \alpha)$ implique que $t = \pm 1$. Comme $s \neq 1$, il suit $t = -1$ c'est à dire $s(\alpha) = -\alpha$. On a donc $s^2 = 1$. La formule

$$s(\xi) = \xi - 2\frac{(\xi, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$$

est vérifiée si $\xi \in H$ et si $\xi \in H^\perp$ donc si $\xi \in V$. Ceci prouve également l'unicité. □

Il suit de la définition et du théorème qu'une réflexion a pour polynôme minimal $(X-1)(X+1)$ et donc qu'elle est diagonalisable et semblable à une matrice du type :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

On sait aussi maintenant qu'à chaque $\alpha \in V \setminus \{0\}$ correspond une unique réflexion fixant l'hyperplan $\langle\alpha\rangle \subset V$. On la note s_α.

Proposition 1.1.3. *Si $\alpha \in V \setminus \{0\}$, pour tout $g \in O(V)$, on a*

$$g s_\alpha g^{-1} = s_{g.\alpha}$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que $g s_\alpha g^{-1}$ est un élément de $O(V)$ différent de l'identité et fixant l'hyperplan $\langle g.\alpha\rangle^\perp = g(\langle\alpha\rangle^\perp)$. On utilise ensuite la proposition 1.1.2 □

Voici la définition d'un groupe de réflexions :

Définition 1.1.4. Un groupe de réflexions réelles est un sous-groupe de $O(V)$ engendré par des réflexions.

Dans ce cours, nous allons exclusivement nous intéresser aux groupes de réflexions finis.

Exemple 1.1.5.

1. Soit $V = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, le groupe diédral D_m d'ordre $2m$ est l'ensemble des éléments de $O(V)$ laissant un polygône à m cotés centré en 0 invariant. On peut montré que D_m est engendré par :
   - les rotations centrées en O d'angle $\dfrac{2k\pi}{m}$.
   - les réflexions d'axes les diagonales du polygône.

   Une rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{m}$ est en fait le produit de deux réflexions d'axes faisant un angle de $\dfrac{\pi}{m}$. Il suit que D_m est un groupe de réflexions.
2. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ se plonge dans $O(\mathbb{R}^n)$ en associant à $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ l'endomorphisme qui à chaque élément e_i de la base canonique associe $e_{\sigma(i)}$. Les transpositions (i,j) engendrent ce groupe et envoient $e_i - e_j$ sur $e_j - e_i$. De plus, si $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \in (e_i - e_j)^\perp$ alors $\alpha_i = \alpha_j$ et (i,j) fixe donc $(e_i - e_j)^\perp$. Ainsi, le groupe symétrique est un groupe de réflexions réelles.

Remarque 1.1.6. On peut aussi considérer une généralisation de cette définition en étudiant les éléments inversibles d'ordre fini d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel fixant un hyperplan. On parle alors de réflexions complexes et les groupes associés sont des groupes de réflexions complexes (voir [13]).

On désire maintenant étudier de manière précise la structure des groupes de réflexions.

1.2 Système de racines

Définition 1.2.1. Un système de racines est un ensemble fini Δ de vecteurs de V tel que

1. $0 \notin \Delta$ et les éléments de Δ engendrent V.
2. Si $\alpha \in \Delta$ alors $-\alpha \in \Delta$. De plus, si $c.\alpha \in \Delta$ pour $c \in \mathbb{R}$ alors $c = \pm 1$.
3. Pour tout $\alpha \in \Delta$, on a
$$s_\alpha(\Delta) = \Delta$$

Les éléments de Δ sont appelés les racines. Si de plus, pour tout $\alpha, \beta \in \Delta$, on a $\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} \in \mathbb{Z}$ (c'est à dire $s_\beta(\alpha)$ est une combinaison linéaire d'éléments de Δ à coefficients dans $\mathbb{Z}$), on dit que le système est cristallographique.

Exemple 1.2.2. Si $\dim(V) = 1$ et si $\alpha \in V \setminus \{0\}$, on a $W = \langle s_\alpha \rangle (\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. $\Delta = \{\alpha, -\alpha\}$ est un système de racine.

On associe maintenant à chaque système de racines un groupe de réflexions finis et réciproquement.

Proposition 1.2.3.

1. *Si Δ est un système de racines de V alors $W(\Delta) = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$ est un groupe de réflexions finis.*
2. *Si W est un groupe de réflexions finis, il existe un système de racines Δ tel que $W = W(\Delta) = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$.*

Démonstration.

1. Comme Δ est fini, on a un nombre fini de valeurs possibles pour les $w(\alpha)$ d'après la propriété (3) de la Definition 1.2.1. Donc si W est infini, il existe des éléments w_1 et w_2 distincts de W tels que $w_1(\alpha) = w_2(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Delta$. Ceci est absurde car Δ contient une base de V.
2. On pose
$$\Delta = \begin{array}{c}\text{Ensemble des vecteurs unitaires orthogonaux aux hyperplans} \\ \text{fixés par les réflexions de } W\end{array}$$
On montre que Δ est un système de racines de $\langle \Delta \rangle$.
   - Soit s est une réflexion de W alors par définition, il existe $\alpha \in \Delta$ tels que $s = s_\alpha$. On a :
   $$W = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle.$$
   - Soit $\alpha \in \Delta$. Si $\beta \in \Delta$, $s_\alpha.\beta$ est unitaire (car $s_\alpha \in O(V)$) et orthogonal à l'hyperplan fixé par la réflexion $s_{s_\alpha.\beta} = s_\alpha s_\beta s_\alpha \in W$ (d'après la Proposition 2.1). Il suit que $s_\alpha.\beta$ est dans Δ. Ce dernier point prouve (3) de la Def. 1.2.1, (1) et (2) sont évidents.

□

Chaque groupe de réflexions fini possède a priori plusieurs systèmes de racines. On va maintenant chercher à lui en associer un remarquable grâce à une notion de minimalité. Pour ceci, nous allons tout d'abord partager un ensemble de racines arbitraire en deux sous-ensembles : les racines positives et les racines négatives. Cette notion de positivité est liée au choix d'un élément de V. Soit donc Δ un système de racines. Comme cet ensemble est fini, il existe $\xi \in V$ tel que

$$(\xi, \alpha) \neq 0 \text{ pour tout } \alpha \in \Delta \qquad (\star)$$

On peut maintenant partitionner notre ensemble Δ :

$$\Delta = \Delta_+^\xi \sqcup \Delta_-^\xi$$

où

$$\Delta_+^\xi = \{\alpha \in \Delta \mid (\alpha, \xi) > 0\} \text{ et } \Delta_-^\xi = \{\alpha \in \Delta \mid (\alpha, \xi) < 0\}$$

Les éléments de Δ_+^ξ sont les racines positives tandis que ceux de Δ_-^ξ sont les racines négatives. On a en fait $\Delta_+^\xi = -\Delta_-^\xi$. Bien sûr, cette partition dépend fortement du choix de $\xi \in V$ vérifiant $(\star)$.

Remarquons que si $\sum_{\alpha \in \Delta_+^\xi} c_\alpha \alpha = 0$ pour des réels positifs c_α alors $\sum_{\alpha \in \Delta_+^\xi} c_\alpha (\alpha, \xi) = 0$ et donc tous les c_α sont nuls.

Le théorème fondamental suivant va nous permettre de définir notre ensemble de racines remarquables :

Théorème 1.2.4. *Soit* $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \Delta_+^\xi$ *tel que :*

(i) $\alpha \in \Delta_+^\xi$ *si et seulement si* $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i$ *avec* $a_i \geq 0$ *pour* $i = 1, \ldots, n$ *non tous nuls.*

(ii) Π *est minimal (en cardinalité) pour la propriété* (i).

Alors les propriétés suivantes sont vérifiées.

1. Π *est une base de* V
2. *Pour tout* $\alpha \in \Delta$*, il existe des réels* $a_i \geq 0$ *pour* $i = 1, \ldots, n$ *tels que*

$$\alpha = \pm \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i$$

3. *Pour tout* $1 \leq i < j \leq n$*, on a* $(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0$.

Démonstration. L'assertion (2) est évidente pour les éléments de Δ_+^ξ. Si $\alpha \in \Delta_-^\xi$ alors $-\alpha \in \Delta_+^\xi$ d'où le résultat.

Montrons (3). On sait que pour tout $1 \leq i < j \leq n$, on a

$$s_{\alpha_i}(\alpha_j) = \alpha_j - a_{ji}\alpha_i \in \Delta$$

avec $a_{ji} = 2\frac{(\alpha_j, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$. On veut montrer que (α_j, α_i) est négatif ou nul. Pour ceci, on raisonne par l'absurde en supposant $a_{ji} > 0$. Deux cas sont à considérer.

– Si $s_{\alpha_i}(\alpha_j) \in \Delta_+^\xi$ alors il existe des réels $a_k \geq 0$ pour $k = 1, \ldots, n$ tels que

$$s_{\alpha_i}(\alpha_j) = \sum_{k=1}^n a_k \alpha_k$$

On a donc
$$\sum_{k\neq i,j} a_k\alpha_k + (a_j - 1)\alpha_j + (a_i + a_{ji})\alpha_i = 0$$
d'après la remarque précédent l'énoncé du théorème, on obtient $a_j - 1 < 0$ mais alors
$$(1 - a_j)\alpha_j = \sum_{k\neq i,j} a_k\alpha_k + (a_i + a_{ji})\alpha_i = 0 \in \Delta_+^\xi$$
ce qui contredit la minimalité de de Π.

– Si $s_{\alpha_i}(\alpha_j) \in \Delta_-^\xi$ alors $-s_{\alpha_i}(\alpha_j) \in \Delta_+^\xi$. Donc il existe des réels $a_i \geq 0$ pour $i = 1, \ldots, n$ tels que
$$s_{\alpha_i}(\alpha_j) = -\sum_{k=1}^n a_k\alpha_k$$
On a donc
$$\sum_{k=1}^n a_k\alpha_k = -\alpha_j + a_{ji}\alpha_i = 0$$
on obtient $a_i - a_{ji} < 0$ et donc $(a_{ji} - a_i)\alpha_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^n a_k\alpha_k + \alpha_j$ ce qui contredit la minimalité de Π.

Donc (2) est prouvé.

Montrons (1). On sait que Δ_+^ξ engendre Δ qui engendre V donc Π engendre V. Reste à montrer que Π est une famille libre. On raisonne par l'absurde en supposant que l'on a une relation du type
$$\rho := \sum_{i\in I} a_i\alpha_i = \sum_{j\in J} b_j\alpha_j \in \Delta_+^\xi$$
avec $a_i, b_j > 0$ pour $i \in I$ et $j \in J$ et $I \cap J = \emptyset$. Alors, on obtient
$$(\rho, \rho) = \sum_{i\in I, j\in J} a_i b_j (\alpha_i, \alpha_j) > 0$$
ce qui est absurde car tous les produits scalaires (α_i, α_j) sont négatifs d'après (3). □

Proposition 1.2.5. *Tout Δ_+^ξ contient un unique ensemble Π satisfaisant les propriétés (1), (2) et (3) du théorème précédent. De plus, tout ensemble satisfaisant ces conditions est contenu dans un Δ_+^ξ pour un $\xi \in V$ satisfaisant $(\star)$.*

Démonstration. On a déjà montré l'existence d'un ensemble Π vérifiant (1), (2) et (3). Supposons que $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ est un ensemble contenu dans Δ_+^ξ vérifiant ces propriétés alors si $\alpha \in \Delta_+^\xi$, on a $\alpha = \pm\sum_{i=1}^n a_i\alpha_i$ avec $a_i > 0$ par (2). Or $\Pi \subset \Delta_+^\xi$ donc $(\alpha_i, \xi) > 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ et comme $(\alpha, \xi) > 0$, on obtient $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i\alpha_i$. De plus, si un des $\alpha_j \in \Pi$ s'écrit $\sum_{i\in I} a_i\beta_i$ avec $a_i \geq 0$ et $\beta_i \in \Delta_+^\xi$ pour $i = 1, \cdots n$, on aboutit à une contradiction avec (1). Il suit que Π vérifie nécessairement les propriétés (i) et (ii) du théorème et est caractérisé par ceci ce qui prouve l'unicité.

Maintenant, soit $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ vérifiant (1), (2) et (3). Il existe alors $\xi \in V$ tel que $(\xi, \alpha_i) > 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Alors Δ_+^ξ est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients positifs des éléments de Π. En effet, si $\alpha \in \Delta_+^\xi$, alors $\alpha = \pm \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i$ avec $a_i \geq 0$ pour $i = 1, \cdots, n$. La propriété $(\alpha, \xi) > 0$ implique que $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i$. Réciproquement, $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i$ avec $a_i \geq 0$ pour $i = 1, \cdots, n$ est dans Δ_+^ξ. La donnée de Π définit Δ_+^ξ de manière unique.

□

Définition 1.2.6. Un ensemble Π vérifiant les propriétés (1) (2) et (3) du théorème est appelé un système fondamental (ou système simple). Les racines de Π sont appelés les racines fondamentales (ou racines simples), les réflexions associés s_α avec $\alpha \in \Pi$, les réflexions fondamentales (ou réflexions simples).

On vient donc de voir qu'à chaque système de racine et à chaque choix de ξ satisfaisant $(\star)$ est associé un unique système fondamental. Réciproquement, tout système fondamental définit un unique système de racine et un unique Δ_+^ξ que l'on note à partir de maintenant Δ_+ et qui est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients positifs des éléments de Π. Soit un tel système fondamental $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, alors tout $\alpha \in \Delta_+^\xi$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i$$

où les a_i sont des réels positifs. Le réel positif $\sum_{i=1}^{n} a_i$ est appelé la hauteur de α. Par définition, les éléments de Π sont des racines de Δ_+^ξ de hauteur 1.

Le but est de montrer que les réflexions simples engendrent le groupe de réflexions associé.

Proposition 1.2.7. *Soit Π un système fondamental. Soit $\alpha \in \Pi$ et $\beta \in \Delta_+$ tel que $\beta \neq \alpha$ alors $s_\alpha.\beta \in \Delta_+$*

Démonstration. On pose $\Pi = \{\alpha, \alpha_1 \dots, \alpha_n\}$. On a $\beta = a_0\alpha + \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i$ avec $a_i \geq 0$ pour tout $i = 0, \dots, n$. On peut supposer que $a_1 > 0$ par la propriété (2) de la Def. 1.2.1. On obtient

$$s_\alpha.\beta = \beta + c\alpha$$

pour un réel c. Le coefficient de $s_\alpha.\beta$ est a_1 qui est positif. Par (2), on a $s_\alpha.\beta \in \Delta_+$. □

Théorème 1.2.8. *Soit $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ un système fondamental dans Δ. Alors on a*

$$W = \langle s_{\alpha_i} \mid i = 1, \dots, n\rangle.$$

De plus, pour tout $\alpha \in \Delta$, il existe $i = 1, \dots, n$ et $w \in W$ tels que $\alpha = w.\alpha_i$.

Démonstration. On pose

$$W_0 = \langle s_{\alpha_i} \mid i = 1, \dots, n\rangle$$

Soit $\alpha \in \Delta_+$ tel que $\alpha \notin \Pi$. On considère alors l'ensemble $W_0\alpha \cap \Delta_+$. Cet ensemble est non vide car $\alpha \in \Delta_+$. Soit γ un des éléments de hauteur minimal dans $W_0\alpha \cap \Delta_+$.

Supposons que $\gamma \notin \Pi$ alors $(\gamma, \alpha_i) > 0$ pour un $i = 1, \cdots, n$. On a $s_{\alpha_i}.\gamma \in \Delta_+$ d'après la proposition 1.2.7. De plus, on a :

$$s_{\alpha_i}.\gamma = \gamma - 2\frac{(\gamma, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}\alpha_i$$

Donc la hauteur de $s_{\alpha_i}.\gamma$ est inférieur à celle de γ. Ceci est aburde donc γ est dans Π.

On vient donc de montrer que pour tout $\alpha \in \Delta_+$, il existe $w \in W_0$ tel que $\gamma = w.\alpha \in \Pi$ d'où $\alpha = w^{-1}.\gamma$. On obtient $s_\alpha = w^{-1}s_{\alpha_i}w \in W_0$. Si $\alpha \in \Delta_-$, on a $s_\alpha = s_{-\alpha} \in W_0$ d'où $W \subset W_0$

□

Exemple 1.2.9. Soit $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ base orthonormale de $\mathbb{R}^{n+1}$. On pose

$$\Delta = \{e_i - e_j \mid 1 \le i, j \le n+1, \ i \neq j\}.$$

On considère l'hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i \mid (a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \ \sum_{i=1}^{n+1} a_i = 0 \right\}$$

On voit facilement que Δ est un système de racines dans V, il est même cristallographique. Un système fondamental associé est

$$\Pi = \{\alpha_i := e_i - e_{i+1} | \ i = 1, \ldots, n\}$$

En fait, on a pour tout $i = 1, \cdots, n$ et $k = 1, \cdots, n$:

$$s_{\alpha_i}(e_k) = \begin{cases} e_k & \text{si } k \neq i, i+1 \\ e_i & \text{si } k = i+1 \\ e_{i+1} & \text{si } k = i \end{cases}$$

Il suit que $W(\Delta)$ est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_{n+1}$, la réflexion s_{α_i} corespondant à la transposition $(i, i+1)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

1.3 Eléments d'un groupe de réflexions

Le but de la suite de ce chapitre est d'obtenir une "présentation" des groupes de réflexions par générateurs et relations c'est à dire, déterminer "toutes" les relations vérifiées par les générateurs de ces groupes. La première étape consiste à étudier en détail la forme des éléments de ces groupes.

Définition 1.3.1. Soit Δ un système de racines, Π un système fondamental et Δ_+ les racines positives. Soit $w \in W$. Il existe alors $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \Pi$ tel que

$$w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_k}$$

Si k est minimal, on note $l(w) = k$ et on dit que k est la longueur de w. Dans ce cas, on dit que $s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_k}$ est une expression réduite de w.

Pour $w \in W$, on note

$$\Delta_w^{\pm} = \{\alpha \in \Delta_+ \mid w.\alpha \in \Delta_\pm\}$$

et

$$N(w) = |\Delta_w^-|.$$

Par exemple, par la proposition 1.2.7, si $\alpha \in \Pi$, on a

$$\Delta_{s_\alpha}^- = \{\alpha\}$$

et donc $N(s_\alpha) = 1$.

Lemme 1.3.2. *Pour tout $w \in W$ et $\alpha \in \Pi$, on a*

$$N(ws_\alpha) = \begin{cases} N(w)+1 & \text{si } w.\alpha \in \Delta_+ \\ N(w)-1 & \text{si } w.\alpha \in \Delta_- \end{cases}$$

Démonstration. Supposons que $w.\alpha \in \Delta_+$ et montrons qu'alors

$$\Delta^-_{ws_\alpha} = \{\alpha\} \sqcup s_\alpha(\Delta^-_w)$$

ce qui prouvera la première partie de la proposition.

- On a $ws_\alpha\alpha = -w\alpha \in \Delta_-$ donc $\alpha \in \Delta^-_{ws_\alpha}$.
- On a $\alpha \notin s_\alpha\Delta^-_w$ sinon $s_\alpha\alpha = -\alpha \in \Delta^-_w$ ce qui contredit le fait que $\Delta^-_w \subset \Delta_+$.
- Comme $\alpha \notin \Delta^-_w$, d'après la proposition 1.2.7, $s_\alpha\Delta^-_w \subset \Delta_+$ et $s_\alpha\Delta^-_w \subset \Delta^-_{ws_\alpha}$ car si $\beta \in \Delta^-_w$, on a $ws_\alpha s_\alpha\beta = w\beta \in \Delta_-$.

Tout ceci implique

$$\{\alpha\} \sqcup s_\alpha(\Delta^-_w) \subset \Delta^-_{ws_\alpha}$$

Soit maintenant $\beta \in \Delta^-_{ws_\alpha}$ tel que $\beta \neq \alpha$ alors $ws_\alpha\beta \in \Delta_-$. Comme $s_\alpha\beta \in \Delta_+$, on a $s_\alpha\beta \in \Delta^-_w$. Donc $\beta \in s_\alpha\Delta^-_w$. Ceci prouve l'inclusion réciproque.

Supposons maintenant que $w.\alpha \in \Delta_-$, on a alors $ws_\alpha\alpha \in \Delta_+$ et il suit que

$$\Delta^-_w = \Delta^-_{ws_\alpha s_\alpha} = \{\alpha\} \sqcup s_\alpha(\Delta^-_{ws_\alpha})$$

□

Proposition 1.3.3 (Loi de simplification). *Soit Π un système fondamental et $w \in W$ tel que $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_m}$ avec $\alpha_i \in \Pi$ pour $i = 1, \cdots, m$. Supposons $m > N(w)$ alors il existe $1 \leq i \leq j \leq m$ tel que*

$$w = s_{\alpha_1} \cdots \cancel{s}_{\alpha_i} \cdots \cancel{s}_{\alpha_j} \cdots s_{\alpha_m}$$

Démonstration. Il existe j tel que

$$N(s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{j+1}}) = N(s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_j}) - 1$$

D'après le lemme précédent, on a donc

$$s_{\alpha_1} \ldots s_{\alpha_j}\alpha_{j+1} \in \Delta_-$$

Il existe i tel que

$$\alpha_{j+1} \in \Delta_+,\ s_{\alpha_j}\alpha_{j+1} \in \Delta_+, \cdots, s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_j}\alpha_{j+1} \in \Delta_+,\ s_{\alpha_i} \cdots s_{\alpha_j}\alpha_{j+1} \in \Delta_-$$

Posons $\beta = s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_j}\alpha_{j+1}$. On a donc $\beta \in \Delta_+$ et $s_{\alpha_i}\beta \in \Delta_-$. Par le lemme, on en déduit $\beta = \alpha_i$. On a donc

$$s_{\alpha_i} = s_\beta = g s_{\alpha_{j+1}} g^{-1}$$

en posant $g = s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_j}$ puis en utilisant la proposition 2.1 en remarquant que $\beta = g\alpha_{j+1}$. On obtient donc

$$s_{\alpha_i} \cdots s_{\alpha_j} = s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_{j+1}}.$$

En substituant dans l'expression :

$$w = s_{\alpha_1} \cdots (s_{\alpha_i} \cdots s_{\alpha_j}) s_{\alpha_{j+1}} \cdots s_{\alpha_m}$$

on obtient le résultat désiré.

□

Proposition 1.3.4. *Pour tout $w \in W$, on a*

$$N(w) = l(w)$$

Démonstration. La loi de simplification implique que $N(w) \geq l(w)$ et le lemme 1.3.2 que $N(w) \leq l(w)$. □

Cette application longueur :

$$\begin{array}{rccc} l: & W & \rightarrow & \mathbb{N} \\ & w & \mapsto & l(w) \end{array}$$

aura une place centrale dans la suite. On peut déjà remarquer que par le lemme 1.3.2 on a pour tout $w \in W$ et pour toute réflexion s simple (=fondamentale) $l(ws) = l(w) + 1$. Notons également que pour tout $w \in W$, on a $l(w) = l(w^{-1})$.

Nous terminons cette section par l'étude de deux éléments remarquables d'un groupe de réflexions fini.

Proposition 1.3.5. *Soit W un groupe de réflexion fini et Π un système fondamental.*

1. *Si $w \in W$ est tel que $w(\Delta_+) = \Delta_+$ alors $w = 1$.*
2. *Il existe un unique élément de longeur maximal $w_0 \in W$. On a*

$$l(w_0) = |\Delta_+|,\ w_0\Delta_+ = \Delta_-, w_0^2 = 1$$

Démonstration. Prouvons (1). Si $w \neq 1$, on a $l(w) = N(w) > 0$ et $w(\Delta_+) \neq \Delta_+$. Prouvons maintenant (2). Soit w_0 un élément de longeur maximal dans W. On a pour tout $\alpha \in \Pi$, $w_0\alpha \in \Delta_-$ par le lemme 1.2.7 donc $l(w_0) = N(w_0) = |\Delta_+|$. Donc $w_0\Delta_+ = \Delta_-$. Maintenant, si w_0' est un autre élément de longeur maximal, on obtient $w_0'\Delta_+ = \Delta_-$ d'où $w_0^{-1}w_0'\Delta_+ = \Delta_+$ et donc $w_0 = w_0'$ par (1) ce qui prouve l'unicité. On a $l(w_0^{-1}) = l(w_0)$ et donc w_0^{-1} est aussi de longeur maximal donc $w_0^{-1} = w_0$ d'où $w_0^2 = 1$. □

Nous allons maintenant développer les outils nécessaires pour aboutir à une présentation de groupes de réflexions.

1.4 Groupes de réflexions comme groupes de Coxeter

Définition 1.4.1. Un groupe de Coxeter W est un groupe fini avec une présentation du type

$$W = \langle s_1, \ldots, s_n \mid (s_i s_j)^{n_{ij}} = 1,\ \forall 1 \leq i, j \leq n \rangle$$

où les n_{ij} sont des entiers positifs vérifiant

$$n_{ii} = 1,\ n_{ij} > 1 \text{ et } n_{ij} = n_{ji} \text{ si } i \neq j$$

l'ensemble (W, S) est appelé un système de Coxeter.

Ceci signifie que si G est un groupe et $f : S \rightarrow G$ une application telle que les $f(s_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ satisfont les mêmes relations, il existe un unique morphisme de groupes

$$F : W \rightarrow G$$

tel que $F(s_i) = f(s_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$

Exemple 1.4.2. Tout groupe cyclique a une présentation par générateurs et relations. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\langle s \mid s^n = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Par la suite, si s et t sont deux éléments d'un groupe de réflexion W fini, nous notons m_{st} l'ordre de st. Notons que l'on a $m_{st} = m_{ts}$.

Le théorème suivant est un résultat-clef du chapitre. D'une part, il permettra de prouver que tout groupe de réflexion est un groupe de Coxeter. D'autre part, beaucoup de résultats sur la combinatoire des éléments d'un groupe de réflexion peuvent être déduit de celui-ci. Avant de l'énoncer, rappellons qu'un monoïde est un ensemble $\mathcal{M}$ muni d'une loi $\star$ tel que

- Pour tout $(x, y) \in \mathcal{M}^2$, on a $x \star y \in \mathcal{M}$,
- Pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{M}^3$, on a $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$,
- Il existe $e \in \mathcal{M}$ tel que pour tout $x \in E$, on a $x \star e = e \star x = x$ (e est l'élément neutre)

Théorème 1.4.3 (Théorème de Matsumoto)**.** *Soit W un groupe de réflexion fini, Π un système fondamental et $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ l'ensemble des réflexions simples de W. Soit $\mathcal{M}$ un monoïde muni d'une loi interne notée multiplicativement. Soit*

$$f : S \to \mathcal{M}$$

une application tel que pour tout $(s, t) \in S^2$, on a :

$$\underbrace{f(s)f(t)f(s)\ldots}_{m_{st}} = \underbrace{f(t)f(s)f(t)\ldots}_{m_{ts}}$$

Alors il existe une unique application

$$F : W \to \mathcal{M}$$

telle que $F(w) = f(s_{i_1})f(s_{i_2})\ldots f(s_{i_k})$ si $s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_k}$ est une expression réduite de W.

Démonstration. Pour tout $j = 1 \ldots n$, notons $y_j := f(s_j)$. Si $w \in W$ et si $s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_k}$ est une expression réduite de W, on pose alors

$$F(w) = y_{i_1}y_{i_2}\ldots y_{i_k}$$

avec $F(1) = e$. Il faut vérifier que F est bien définie c'est à dire que si $l(w) = k$ et si $s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_k}$ et $s_{j_1}s_{j_2}\ldots s_{j_k}$ sont deux expressions réduites de w, on a

$$y_{i_1}y_{i_2}\ldots y_{i_k} = y_{j_1}y_{j_2}\ldots y_{j_k}$$

Pour ceci, on raisonne par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

- Si $k = 0$ ou $k = 1$, le résultat est clair.
- Supposons le résultat vrai pour les éléments de longueur $k-1$. Montrons qu'il le reste pour les éléments de longeur k. Supposons donc que $s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_k}$ et $s_{j_1}s_{j_2}\ldots s_{j_k}$ sont deux expressions réduites de w. On a donc

$$s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_k} = s_{j_1}s_{j_2}\ldots s_{j_k}$$

et il suit donc :

$$s_{j_1}s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_k} = s_{j_2}\ldots s_{j_k}.$$

L'expression $s_{j_2}\dots s_{j_k}$ est réduite donc la loi de simplification (Prop. 1.3.3) implique qu'il existe $t \in [1,k]$ tel que

$$s_{j_1}s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_k} = s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_{t-1}}s_{i_{t+1}}\dots s_{i_k}$$

On a en particulier

$$s_{j_1}s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_t} = s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_{t-1}}$$

et ainsi

$$s_{j_1}s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_{t-1}} = s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_t} \tag{1.1}$$

L'expression $s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_{t-1}}s_{i_{t+1}}\dots s_{i_k}$ est réduite (car égale à $s_{j_2}\dots s_{j_k}$ qui l'est). Par hypothèse de récurrence, on obtient donc

$$y_{i_1}y_{i_2}\dots y_{i_{t-1}}y_{i_{t+1}}\dots y_{i_k} = y_{j_2}\dots y_{j_k}$$

et on en déduit donc

$$y_{j_1}y_{i_1}y_{i_2}\dots y_{i_{t-1}}y_{i_{t+1}}\dots y_{i_k} = y_{j_1}y_{j_2}\dots y_{j_k} \tag{1.2}$$

Deux cas sont maintenant à considérer.

1. On a $t < k$. Alors l'hypothèse de récurrence appliquée à l'égalité (1.1) induit

   $$y_{j_1}y_{i_1}y_{i_2}\dots y_{i_{t-1}} = y_{i_1}y_{i_2}\dots y_{i_t}$$

   en reportant dans (1.2), il suit :

   $$y_{i_1}y_{i_2}\dots y_{i_k} = y_{j_1}y_{j_2}\dots y_{j_k}$$

   ce qu'il fallait montrer.
2. Si $t = k$, on a alors par (1.1)

   $$s_{j_1}s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_{k-1}} = s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_k}$$

   Ces expressions sont réduites donc en appliquant exactement le même procédé que ci-dessus, on en revient à deux cas à considérer.

   (a) Le premier cas implique $y_{j_1}y_{i_1}\dots y_{i_{k-1}} = y_{i_1}\dots y_{i_k}$ ce qui prouve le résultat.

   (b) Le deuxième implique l'égalité

   $$s_{i_1}s_{j_1}s_{i_1}\dots s_{i_{k-2}} = s_{j_1}s_{i_1}\dots s_{i_{k-1}}$$

   Ces expressions sont réduites et nous avons deux cas à considérer comme ci-dessus. En continuant de la sorte, le seul problème se situe lorsque l'on a

   $$s_{i_1}s_{j_1}s_{i_1}\dots = s_{j_1}s_{i_1}s_{j_1}\dots$$

   où les deux expressions sont réduites. Ceci implique que le nombre de facteurs de chaque coté de l'expression est égale à $m_{s_{i_1}s_{j_1}}$. Par hypothèse, on obtient

   $$y_{i_1}y_{j_1}y_{i_1}\dots = y_{j_1}y_{i_1}y_{j_1}\dots$$

   en remplaçant dans les identités obtenus, on obtient le résultat.

□

Donnons un corollaire immédiate de ce théorème fondamental.

Corollaire 1.4.4. *Soit W un groupe de réflexions, Π un système fondamental et $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ l'ensemble des réflexions simples. Soit $w \in W$ et soit $s_{i_1} \ldots s_{i_k}$ et $s_{j_1} \ldots s_{j_k}$ deux expressions réduites de W. Alors, on a :*

$$\{s_{i_1}, \ldots, s_{i_k}\} = \{s_{j_1}, \ldots, s_{j_k}\}$$

De plus, l'ensemble

$$\mathcal{S}(w) = \{v = s_{i_{p_1}} \ldots s_{i_{p_s}} \mid 1 \leq p_1 \leq \ldots \leq p_s \leq k\}$$

ne dépend pas du choix de l'expression réduite.

Démonstration. On définit $\mathcal{M}$ comme étant l'ensemble de tous les sous-ensembles de W. On va mettre deux structures de monoïdes sur $\mathcal{M}$.

- Tout d'abord, on définit le produit . comme étant la réunion ensembliste. On obtient bien une structure de monoïde sur $\mathcal{M}$. On considère alors l'application

  $$\begin{array}{rccc} f: & S & \to & \mathcal{M} \\ & s & \mapsto & \{s\} \end{array}$$

  Soit s et t dans S, on a alors

  $$\begin{array}{rcl} \underbrace{f(s).f(t).f(s)\ldots}_{m_{st}} & = & \{s,t\} \\ & = & \underbrace{f(t).f(s).f(t)\ldots}_{m_{ts}} \end{array}$$

  Donc l'hypothèse du théorème de Matsumoto est vérifiée. Ainsi, il existe

  $$F : W \to \mathcal{M}$$

  tel que pour tout w dans W, si $s_{i_1} \ldots s_{i_k}$ et $s_{j_1} \ldots s_{j_k}$ est une expression réduite de W, on a :

  $$F(w) = \{s_{i_1}, \ldots . s_{i_k}\}$$

  mais si $s_{j_1} \ldots s_{j_k}$ est une autre expression réduite de w, on a aussi :

  $$F(w) = \{s_{j_1}, \ldots . s_{j_k}\}$$

  d'où le résultat
- On définit maintenant un produit sur $\mathcal{M}$ tel que pour A et B dans $\mathcal{M}$,

  $$A \star B = \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}$$

  On considère l'application

  $$\begin{array}{rccc} f: & S & \to & \mathcal{M} \\ & s & \mapsto & \{1,s\} \end{array}$$

  Soit s et t dans S, on a alors

  $$\begin{array}{rcl} \underbrace{f(s) \star f(t) \star f(s) \star \ldots}_{m_{st}} & = & \{1,s\} \star \{1,t\} \star \{1,s\} \ldots \\ & = & \underbrace{f(t) \star f(s) \star f(t) \ldots}_{m_{ts}} \end{array}$$

  Dons l'hypothèse du théorème de Matsumoto est vérifié. Ainsi, il existe

  $$F : W \to \mathcal{M}$$

tel que pour tout w dans W, si $s_{i_1}\dots s_{i_k}$ et $s_{j_1}\dots s_{j_k}$ est une expression réduite de W, on a :

$$F(w)=\mathcal{S}(w)$$

qui ne dépend pas du choix de l'expression réduite.

$\square$

Un élément de $\mathcal{S}(w)$ est par définition appelé une sous-expression de w. Ceci nous permet de définir un ordre partiel sur W.

Corollaire 1.4.5. *Soit W un groupe de réflexions, Π un système fondamental et $S=\{s_1,\dots,s_n\}$ l'ensemble des réflexions simples. On a un ordre partiel $\leq$ sur W défini comme suit. Soit $(y,w)\in W^2$ alors $y\leq w$ si et seulement si y est une sous-expression de W. On appelle cet ordre partiel l'ordre de Bruhat-Chevalley*

Démonstration. On vérifie facilement que la loi est réflexive et antisymétrique. Concernant la transitivité, soient $(x,y,w)\in W^3$ tel que $x\leq y$ et $y\leq w$. Notons $s_{i_1}\dots s_{i_k}$ une expression réduite de w. Alors, on a

$$y=s_{i_{p_1}}\dots s_{i_{p_s}}$$

pour $1\leq p_1\leq\dots\leq p_s\leq k$. Cette expression n'est pas forcément réduite mais par la loi de simplification, on peut supposer qu'elle l'est, quitte à supprimer quelques facteurs. Une sous-expression de x est alors clairement une sous-expression de w.

$\square$

Donnons maintenant le résultat principal de cette section.

Théorème 1.4.6. *Soit W un groupe de réflexions de système fondamental Π. Soit $S=\{s_1,\dots,s_n\}$ l'ensemble des réflexions simples. Alors (W,S) est un système de Coxeter.*

Démonstration. On doit montrer que W a une présentation par
- générateurs : S,
- relations : pour tout $(s,t)\in S^2$, $(st)^{m_{st}}=1$

Soit G un groupe et $f:S\to G$ une application telle que pour tout $(s,t)\in S^2$, on a :

$$(f(s)f(t))^{m_{st}}=1$$

Par le théorème de Matsumoto, il existe alors que application

$$F:W\to G$$

telle que si $s_{i_1}\dots s_{i_k}$ est une expression réduite de $w\in W$, on a :

$$F(w)=f(s_{i_1})\dots f(s_{i_k})$$

Il reste à montrer que F est un morphisme de groupes. Pour ceci, il suffit de montrer que pour tout $s\in S$ et pour tout $w\in W$, on a

$$f(sw)=f(s)f(w)$$

Soit $s_{i_1}\dots s_{i_k}$ une expression réduite de w. Deux cas sont à considérer :
- Si $l(sw)>l(w)$ alors l'expression $ss_{i_1}\dots s_{i_k}$ est réduite, alors

  $$f(sw)=f(s)f(s_{i_1})\dots f(s_{i_k})$$

  d'où $f(sw)=f(s)f(w)$.

– sinon, $w' = sw$ vérifie $l(sw') > l(w)$ donc $f(sw') = f(s)f(w')$ et donc $f(sw) = f(s)f(w)$ car $f(s)^2 = e$.

$\square$

Ainsi, tout groupe de réflexion est un groupe de Coxeter et on a donc une présentation par générateurs et relations de ces groupes

Exemple 1.4.7. Considérons le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. On a vu que que l'on peut prendre $S = \{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$ où les s_i correspondent aux transpositions $(i, i+1)$ avec $i \in \{1, \ldots, n-2\}$. On voit facilement que $s_i s_j$ est d'ordre 2 si $|i-j| > 1$ et que $s_i s_{i+1}$ est d'ordre 3 si $i \in \{1, \ldots, n-2\}$. On en déduit que l'on a une présentation du groupe sym :'etrique par

1. Générateurs : $\{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$
2. Relations : pour tout $i \in \{1, \ldots, n-2\}$, $s_i^2 = 1$, pour tout $|i-j| > 1$, $s_i s_j = s_j s_i$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n-2\}$, $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$.

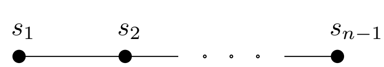
La réciproque du théorème 1.4.6 est établie dans la section suivante où nous définissons d'autres notions fondamentales associé aux groupes de réflexions.

1.5 Classification et sous-groupes paraboliques

Nous devons tout d'abord définir la notion de groupe de Coxeter irréductible. Pour ceci, le “graphe de Coxeter" associé au groupe W est particulièrement utile.

Définition 1.5.1. Soit (W, S) un système de Coxeter. Le graphe de Coxeter de ce système est le graphe défini comme suit.
– les sommets sont les éléments S de W,
– deux sommets s et t sont reliés par une arête si et seulement si $m_{st} \neq 2$, cette arête est alors indicée par m_{st} (si $m_{st} = 4$, on met parfois une double barre au lieu de l'indice).

A tout graphe est bien sûr associé un unique système de Coxeter (à isomorphisme près). Par exemple, le graphe de Coxeter du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.



On dit que $\mathfrak{S}_n$. est un groupe de Coxeter de type A_{n-1}.

Proposition 1.5.2. *Soit (W, S) un système de Coxeter. On suppose que le graphe de Coxeter de W admet k composantes connexes et pour tout $i = 1, .., k$, on note S_i les sommets de la ième composante connexe de sorte que*

$$S = S_1 \sqcup S_2 \sqcup \ldots \sqcup S_k.$$

Pour tout $i = 1, .., k$, on note $W_i = \langle S_i \rangle$. Alors (W_i, S_i) est un système de Coxeter et on a

$$W = W_1 \times W_2 \times \ldots \times W_k$$

Démonstration. Il est clair que les (W_i, S_i) sont des systèmes de Coxeter. Par définition, tout élément de W s'écrit de manière unique sous la forme

$$w = w_1 w_2 \dots w_k$$

où $w_i \in W_i$ pour tout $i = 1, ..., k$ où les w_i commutent entre eux. On en déduit le résultat. $\square$

La définition suivante est cohérente avec le résultat ci-dessus.

Définition 1.5.3. On dit qu'un groupe de Coxeter est irréductible si son graphe ne possède qu'une seule composante connexe.

On reparlera un peu plus tard du problème de classification des groupes de Coxeter. On peut maintenant énoncer le théorème principal de cette section, réciproque du théorème 1.4.6 Nous ne donnons qu'une stratégie de la preuve.

Théorème 1.5.4. *Soit (W, S) un système de Coxeter (fini) où $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ alors W est un groupe de réflexions et il existe un système fondamental Π tel que S est l'ensemble des réflexions simples de W.*

Démonstration. On se réfère à [2, §68 Ch.5] et [4, Thm 64.28] pour une démonstration détaillée. L'idée de la preuve est la suivante : on munit $\mathbb{R}^n$ d'une forme bilinéaire symétrique.

$$\begin{array}{cccc} B : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (e_i, e_j) & \mapsto & -\cos(\pi/m_{i,j}) \end{array}$$

où m_{ij} est l'ordre de $s_i s_j$ dans W. On construit alors une application

$$\rho : S \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

comme suit : pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, on a

$$\rho(s_i)(e_j) = e_j - 2B(e_j, e_i)e_i$$

On montre ensuite que les $\rho(s_i)\rho(s_j)$ sont d'ordre m_{ij} pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$. Par la propriété universelle, ρ s'étend à W tout entier.

$$\rho : W \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

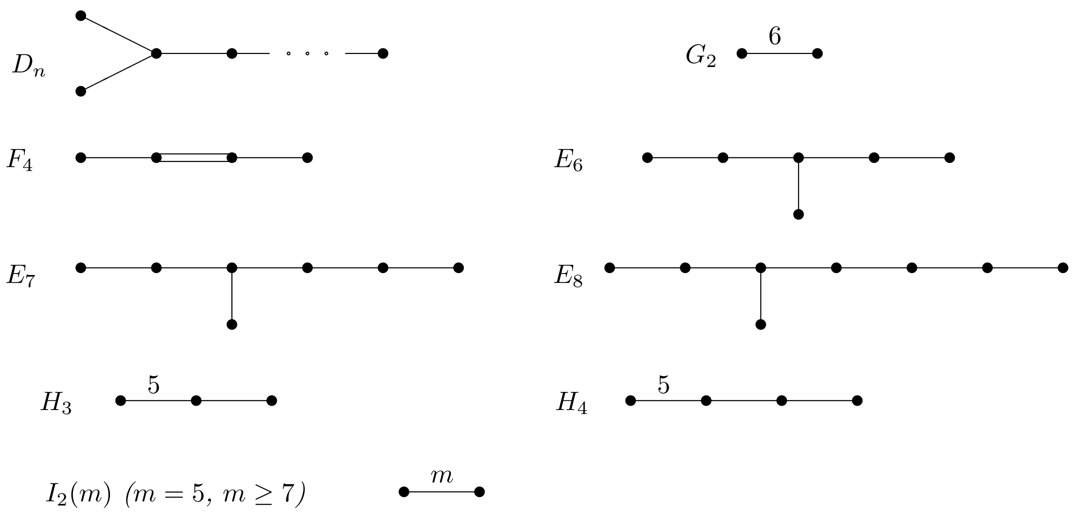
On obtient ainsi une représentation de W. Ensuite, on montre que B est définie positive en deux temps : en considérant tout d'abord le cas W irréductible puis le cas général. Enfin, on montre que la représentation ρ est fidèle c'est à dire injective. Ainsi, W est isomorphe à $\rho(W)$ qui est lui-même un groupe de réflexions. $\square$

On peut maintenant donner le théorème de classification des groupes de Coxeter. Cette classification se fait en donnant le graphe de Coxeter associé qui détermine uniquement le groupe. Nous ne donnons pas la preuve (trop longue) et on se réfère à [2, Ch. 6,§4] ou [10, §2.7].

Théorème 1.5.5. *Les groupes de Coxeter irréductibles sont ceux associés aux graphes de Coxeter suivants.*

A_{n-1}

B_n



Les groupes de Weyl correspondent aux types A_{n-1}, B_n,D_n, $E_{6,7,8}$, G_2 et F_4.

Le groupe $I_2(m)$ est en fait le groupe diédral d'ordre $2m$. Il a donc une présentation par générateurs s et t et relations $s^2 = t^2 = 1$, $(st)^m = 1$.

Nous terminons ce chapitre par une étude de certains sous-groupes remarquables de groupes de Coxeter : les sous-groupes paraboliques.

Définition 1.5.6. Soit (W, S) un système de Coxeter. Soit $J \subset S$ et soit $W_J := \langle J \rangle \subset W$. Alors W_J est appelé un sous-groupe parabolique (standard) de W.

Proposition 1.5.7. *Soit W un groupe de réflexions fini de système fondamental Π et de système de racines Δ. Soit S l'ensemble des réflexions simples. Soit $J \subset S$ et soit Π_J l'ensemble des éléments de Π associés aux éléments de J. Soit $\Delta_J = \Delta \cap \langle \Pi_J \rangle$. Alors Δ_J est un ensemble de racines dans $\langle \Pi_J \rangle$ avec système fondamental Π_J et W_J est le groupe de réflexions fini associé à Δ_J. Soit l_J la fonction longueur sur W_J et l celle de W. Alors, pour tout $w \in W_J$, on a $l(w) = l_J(w)$.*

Démonstration. On vérifie que Δ_J satisfait les axiomes de le Définition 1.2.1 et que Π_J est un système fondamental. Alors, W_J est bien un groupe de réflexions engendré par J. Soit $w \in W_J$ avec $l_J(w) = k$ alors w s'écrit comme produit de facteurs d'éléments de J comme suit $s_1 \dots s_k$. Si $l(w) \neq k$, on peut appliquer la règle de simplification ce qui contredit $l_J(w) = k$ d'où le résultat. $\square$

Enfin, notons que le graphe de Coxeter d'un sous-groupe parabolique s'obtient en supprimant des sommets et leurs arêtes adjacentes du graphe originel.

Chapitre 2

Algèbres de Iwahori-Hecke comme algèbre symétrique.

Dans ce chapitre, nous introduisons l'algèbre de Iwahori-Hecke associée à une groupe de Coxeter fini W. Celle-ci peut être vue comme l'algèbre de groupe $K[G]$ sur un corps K mais sur laquelle on a déformé la multiplication par un élément $q \in K^{\times}$.

Ces algèbres apparaîssent naturellement dans le contexte suivant (on se réfère à [5, §67.A]). Soit $\mathbb{F}_q$, corps fini à $q = p^a$ éléments où p désigne un nombre premier ($a \in \mathbb{N}$). On considère le groupe $G := \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ et $\mathcal{B}$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieurs (appelé le sous-groupe de Borel de G). On sait que le groupe W de type A_{n-1} peut se réaliser comme sous-groupe de G via les matrices de permutations. On peut alors montrer que

$$G = \bigsqcup_{w \in W} \mathcal{B}w\mathcal{B}$$

C'est la décomposition de Bruhat. Considérons maintenant l'algèbre du groupe $\mathbb{C}[G]$. On a alors un idempotent

$$e = \frac{1}{|\mathcal{B}|} \sum_{b \in \mathcal{B}} b \in \mathbb{C}[G]$$

On note $H := e\mathbb{C}[G]e \subset \mathbb{C}[G]$. C'est une algèbre d'élément neutre e. Pour tout $w \in W$, on pose

$$T_w = \frac{1}{|\mathcal{B}|} \sum_{x \in \mathcal{B}w\mathcal{B}} x$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème d'Iwahori. *Soit $S = \{s_i \mid i = 1, \ldots, n-1\}$ l'ensemble des réflexions simples de W (chaque s_i correspondant à la transposition $(i, i+1)$). Alors, l'ensemble $\{T_w \mid w \in W\}$ forme une base de H et la multiplication est déterminée par les formules suivantes. Si $s \in S$ et $w \in W$, alors :*

$$T_s T_w = \begin{cases} T_{sw} & \text{si } l(sw) > l(w) \\ qT_{sw} + (q-1)T_w & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus, on a une présentation de H par

- *générateurs : $\{T_{s_i} \mid i = 1, ..., n-1\}$*
- *relations :*

$$\begin{array}{ll} T_{s_i}^2 = qT_1 + (q-1)T_{s_i} & i = 1, \ldots n-1 \\ T_{s_i}T_{s_j} = T_{s_j}T_{s_i} & |i-j| > 1, \\ T_{s_{i+1}}T_{s_i}T_{s_{i+1}} = T_{s_i}T_{s_{i+1}}T_{s_i} & i = 1, \ldots n-2 \end{array}$$

L'algèbre H est appelée algèbre de Iwahori-Hecke.

Nous allons tenter de définir un analogue de cette algèbre pour tout groupe de Coxeter fini. Celle-ci aura une structure particulière qu'il conviendra d'étudier le plus généralement possible. Ce chapitre est essentiellement basé sur [7]

2.1 Définition

Dans tout ce chapitre, on se donne un système de Coxeter (W, S) comme dans le chapitre précédent. Nous désirons obtenir une algèbre généralisant celle d'Iwahori. Pour ceci, on se place sur un anneau A commutatif et unitaire. On se donne également un sous ensemble $\{a_s, b_s\}_{s\in S}$ de A vérifiant la propriété suivante

$$\text{Si } s \in S \text{ et } t \in S \text{ sont conjugués dans } W \text{ alors } a_s = a_t \text{ et } b_s = b_t \tag{2.1}$$

Que signifie cette propriété de conjugaison ? ceci peut facilement se voir, par exemple, sur le graphe de Coxeter grâce à la proposition suivante.

Proposition 2.1.1. *Deux éléments $s \in S$ et $t \in S$ sont conjugués dans W si et seulement si il existe une suite*

$$s = s^{(0)}, s^{(1)}, \dots, s^{(r)} = t$$

d'éléments de S tel que $m_{s^{(i-1)},s^{(i)}}$ est impair pour tout $i = 1, \dots r$.

Démonstration. Soit $s \in S$. On pose

$$S' = \{t \in S \mid \exists\ s = s^{(0)}, s^{(1)}, \dots, s^{(r)} = t,\ m_{s^{(i-1)},s^{(i)}} \text{ impair pour tout } i = 1, \dots r\}$$

On a $S' \neq \emptyset$ car $s \in S'$. Soit :

$$\begin{array}{rccc} f: & S & \to & \{\pm 1\} \\ & t & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } t \in S' \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Soit u et v dans S. On a bien :

$$\underbrace{f(u)f(v)f(u)\dots}_{m_{uv}} = \underbrace{f(u)f(v)f(u)\dots}_{m_{uv}}$$

Le seul problème pourrait éventuellement intervenir si m_{uv} est impair et si $u \in S'$, $v \notin S'$ (ou $v \in S'$, $u \notin S'$) mais ceci est impossible. En effet, on a alors une suite

$$s = s^{(0)}, s^{(1)}, \dots, s^{(r)} = u$$

d'éléments de S tel que $m_{s^{(i-1)},s^{(i)}}$ est impair pour tout $i = 1, \dots r$. Donc on a une suite

$$s = s^{(0)}, s^{(1)}, \dots, s^{(r)} = u, s^{(r+1)} = v$$

d'éléments de S tel que $m_{s^{(i-1)},s^{(i)}}$ est impair pour tout $i = 1, \dots r+1$ ce qui implique que $v \in S'$. Etant donnée la présentation de W par générateurs et relations, on en déduit qu'Il existe une application

$$F : W \to \{\pm 1\}$$

telle que $F(w) = f(s_{i_1}) \dots f(s_{i_k})$ lorsque $s_{i_1} \dots s_{i_k}$ est une expression réduite de w. On vérifie facilement que F est un morphisme de groupe exactement comme dans la preuve du théorème 1.4.6. Supposons maintenant que t soit conjugué à s et que $t \notin S'$. On obtient

$F(t) = -1$ et $F(s) = 1$ ce qui est absurde car F est un morphisme et s et t conjugué dans W.

Réciproquement, supposons qu'il existe une suite

$$s = s^{(0)}, s^{(1)}, \ldots, s^{(r)} = t$$

d'éléments de S tel que $m_{s^{(i-1)},s^{(i)}}$ est impair pour tout $i = 1, \ldots r$. Alors, pour tout $i = 1, \ldots r$, les réflexions $s^{(i-1)}$ et $s^{(i)}$ sont conjugués dans W. En effet, on a :

$$\underbrace{s^{(i-1)}s^{(i)}s^{(i-1)}\ldots}_{m_{s^{(i-1)},s^{(i)}}} = \underbrace{s^{(i)}s^{(i-1)}s^{(i)}\ldots}_{m_{s^{(i-1)}s^{(i)}}}$$

et donc en posant

$$w := \underbrace{s^{(i)}s^{(i-1)}\ldots}_{m_{s^{(i-1)},s^{(i)}}-1}$$

on a $s^{(i-1)}w = ws^{(i)}$.Donc, tous les $s^{(i)}$ sont conjugués dans S d'où le résultat.

□

Ainsi, en type A_{n-1} toutes les réflexions simples sont conjugués comme en type D_n. Par contre, en type B_n, il y a une réflexion simple qui n'est pas conjugués aux autres.

On se donne maintenant le A-module libre

$$H := H(W, S, \{a_s, b_s\}_{s \in S})$$

de base $\{T_w\}_{w \in W}$. Ainsi tout élément de H est de la forme $\sum_{w \in W} \alpha_w T_w$ où $(\alpha_w)_{w \in W}$ est une suite déléments de A. Le problème se résume maintenant à définir une multiplication qui puisse donner une structure d'algèbre pour H généralisant la structure de l'algèbre donnée dans l'introduction.

Théorème 2.1.2 (Bourbaki)**.** *Il existe une unique multiplication*

$$. : H \times H \to H$$

telle que H est une algèbre associative unitaire d'identité T_1 et telle que pour tout $s \in S$ et $w \in W$, on a

$$T_s T_w = \begin{cases} T_{sw} & \textit{si } l(sw) > l(w) \\ a_s T_{sw} + b_s T_w & \textit{sinon} \end{cases}$$

Le A-module H muni de cette application s'appelle l'algèbre de Iwahori-Hecke de W.

Démonstration. Notons tout d'abord que si on admet la règle de multiplication ci-dessus alors celle-ci est unique. Il suffit de voir que si $s_{i_1} \ldots s_{i_k}$ est une expression réduite de w, alors $T_w = T_{s_{i_1}} \ldots T_{s_{i_k}}$.

Montrons maintenant que la multiplication comme ci-dessus fait de H une A-algèbre associative et unitaire. Pour ceci, on définit, pour $s \in S$ les endomorphismes suivants :

$$\begin{array}{cccl} \lambda_s : & H & \to & H \\ & T_w & \mapsto & \begin{cases} T_{sw} & \text{si } l(sw) > l(w) \\ a_s T_{sw} + b_s T_w & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccl} \rho_s : & H & \to & H \\ & T_w & \mapsto & \begin{cases} T_{ws} & \text{si } l(ws) > l(w) \\ a_s T_{ws} + b_s T_w & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

On considère alors les deux algèbres suivantes :

$$\begin{array}{ll} \mathcal{L} := & \text{sous-algèbre de } \mathrm{End}_A(H) \text{ engendré par les } \lambda_s \text{ pour } s \in S \\ \mathcal{R} := & \text{sous-algèbre de } \mathrm{End}_A(H) \text{ engendré par les } \rho_s \text{ pour } s \in S \end{array}$$

- Pour tout $(s,t) \in S^2$, on montre que $\lambda_s \circ \rho_t = \rho_t \circ \lambda_s$ c'est à dire que pour tout $w \in W$, on a $\lambda_s \circ \rho_t(T_w) = \rho_t \circ \lambda_s(T_w)$. Considérons plusieurs cas :
  - Si $l(sw) > l(w)$ et $l(swt) > l(sw)$, on a alors $l(wt) > l(w)$ sinon $l(wt) < l(w)$ et $l(swt) \leq l(w)$. On obtient

$$\lambda_s(\rho_t(T_w)) = \lambda_s(T_{wt}) = T_{swt}$$

$$\rho_t(\lambda_s(T_w)) = \rho_t(T_{sw}) = T_{swt}$$

  - Si $l(sw) > l(w)$, $l(swt) < l(sw)$ et $l(wt) < l(w)$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl}\lambda_s(\rho_t(T_w)) & = & \lambda_s(a_t T_{wt} + b_t T_w) \\ & = & a_t \lambda_s(T_{wt}) + b_t \lambda_s(T_w) \\ & = & a_t T_{swt} + b_t T_{sw}\end{array}$$

  et

$$\begin{array}{rcl}\rho_t(\lambda_s(T_w)) & = & \rho_t(T_w) \\ & = & a_t T_{swt} + b_t T_{sw}\end{array}$$

- Si $l(sw) > l(w)$, $l(swt) < l(sw)$ et $l(wt) > l(w)$, on a $l(swt) = l(sw) - 1 = l(w) < l(wt)$. On obtient :

$$\lambda_s(\rho_t(T_w)) = \lambda_s(T_{wt}) = a_s T_{swt} + b_s T_{wt}$$

$$\rho_t(\lambda_s((T_w)) = \rho_t(T_{sw}) = a_t T_{swt} + b_t T_{sw}$$

  Or, on a $sw = wt$. En effet, soit $s_{i_1} \dots s_{i_k}$ une expression réduite de w. Les expressions $ss_{i_1} \dots s_{i_k}$ et $s_{i_1} \dots s_{i_k} t$ sont réduites mais $ss_{i_1} \dots s_{i_k} t$ ne l'est pas. On peut appliquer la règle de simplification. La seule possibilité est que $ss_{i_1} \dots s_{i_k} t = s_{i_1} \dots s_{i_k} = w$ d'où le résultat. De plus, comme s et t sont conjugués, Il suit que $a_s = a_t$ et $b_s = b_t$ et on obtient bien $\lambda_s(\rho_t(T_w)) = \rho_t(\lambda_s((T_w)$.
- Si $l(sw) < l(w)$, $l(swt) < l(sw)$, on a alors $l(wt) < l(w)$ sinon $l(wt) = l(w) + 1$ et $l(wt) = l(sw) + 2 < l(swt) + 2$ ce qui est absurde. On obtient donc :

$$\begin{array}{rcl}\lambda_s(\rho_t(T_w)) & = & \lambda_s(a_t T_{wt} + b_t T_w) \\ & = & a_t \lambda_s(T_{wt}) + b_t \lambda_s(T_w) \\ & = & a_t(a_s T_{swt} + b_s T_{wt}) + b_t(a_s T_{sw} + b_s T_w)\end{array}$$

  et

$$\begin{array}{rcl}\rho_t(\lambda_s(T_w)) & = & \rho_t(a_s T_{sw} + b_s T_w) \\ & = & a_s(a_t T_{swt} + b_t T_{sw}) + b_s(a_t T_{wt} + b_t T_w)\end{array}$$

- Si $l(sw) < l(w)$, $l(swt) > l(sw)$ et $l(wt) > l(w)$, on a alors $l(swt) = l(sw) + 1 = l(w) = l(wt) - 1$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl}\lambda_s(\rho_t(T_w)) & = & \lambda_s(T_{wt}) \\ & = & a_s T_{swt} + b_s T_{wt}\end{array}$$

  et

$$\begin{array}{rcl}\rho_t(\lambda_s(T_w)) & = & \rho_t(a_s T_{sw} + b_s T_w) \\ & = & a_s T_{swt} + b_s T_{wt}\end{array}$$

- Si $l(sw) < l(w)$, $l(swt) > l(sw)$ et $l(wt) < l(w)$, on a alors $l(swt) = l(sw) + 1 = l(w) = l(wt) + 1$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl}\lambda_s(\rho_t(T_w)) & = & \lambda_s(a_t T_{wt} + b_t T_w) \\ & = & a_t T_{swt} + b_t(a_s T_{sw} + b_s T_w)\end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl}\rho_t(\lambda_s(T_w)) & = & \rho_t(a_sT_{sw}+b_sT_w)\\ & = & a_sT_{swt}+b_s(a_tT_{wt}+b_tT_w)\end{array}$$

Or, on a $sw = wt$. En effet, soit $s_{i_1}\dots s_{i_k}$ une expression réduite de w. Comme $l(sw) < l(w)$, par la loi de simplification on peut choisir $s_{i_1} = s$. On a $w = ss_{i_2}...s_{i_k}$ réduite, $wt = ss_{i_2}...s_{i_k}t$ non réduite et $swt = s_{i_2}...s_{i_k}t$ réduite. Donc on a nécessairement $wt = s_{i_2}...s_{i_k}$. Il suit que $wt = sw$. De plus, comme s et t sont conjugués, Il suit que $a_s = a_t$ et $b_s = b_t$ et on obtient bien $\lambda_s(\rho_t(T_w)) = \rho_t(\lambda_s(T_w))$.

On a donc montré que λ_s et ρ_t commutent.

- On considère l'application :

$$\begin{array}{rccc}\Phi: & \mathcal{L} & \to & H\\ & \lambda & \mapsto & \lambda(T_1)\end{array}$$

Il est clair que Φ est un morphisme de A-modules. Montrons que c'est un isomorphisme.

  – Φ est surjective. En effet, si $w \in W$, soit $s_{i_1}\dots s_{i_k}$ une expression réduite de w. On a

$$\Phi(\lambda_{s_{i_1}}\circ ... \circ \lambda_{s_{i_k}}) = T_w$$

  – Φ est injective. En effet, soit $\lambda \in \mathcal{L}$ tel que $\lambda(T_1) = 0$. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc}\Psi: & \mathcal{R} & \to & H\\ & \rho & \mapsto & \rho(T_1)\end{array}$$

Comme pour Φ, le morphisme Ψ est surjectif. Soit $h \in H$, il existe $\rho \in \mathcal{L}$ tel que $\rho(T_1) = h$ alors

$$\lambda(\rho(T_1)) = \lambda(h) = \rho(\lambda(T_1)) = 0$$

car λ et ρ commutent d'après la propriété ci-dessus. On a donc montré que Φ est un isomorphisme de A-modules.

En conclusion, $\mathcal{L}$ étant une algèbre associative unitaire, on peut introduire une multiplication sur H comme suit : soit $w \in W$ et $w' \in W$ alors

$$T_w.T_{w'} = \Phi(\Phi^{-1}(T_w)\circ\Phi^{-1}(T_{w'}))$$

qui fait de H une algèbre associative unitaire d'élément neutre T_1. Notons que si $s_{i_1}\dots s_{i_k}$ est une expression réduite de $w \in W$, on a

$$\Phi^{-1}(T_w)(T_1) = \lambda_{s_{i_1}}\circ\dots\circ\lambda_{s_{i_k}}(T_1) = T_w$$

Ainsi, pour tout $s \in S$ et $w \in W$on obtient :

$$\begin{array}{rcl}T_s.T_w & = & \Phi(\Phi^{-1}(T_s)\circ\Phi^{-1}(T_w))\\ & = & \lambda_s(\Phi^{-1}(T_w))(T_1)\\ & = & \lambda_s(T_w)\end{array}$$

ce qu'il fallait montrer. □

Notons que dans le cas particulier où $a_s = 1$ et $b_s = 0$ pour tout $s \in S$, on a pour tout $s \in S$ et $w \in W$, $T_sT_w = T_{sw}$. Ainsi, l'algèbre H est isomorphe à l'algèbre du groupe $A[W]$. On peut donc voir les algèbres de Iwahori-Hecke comme des généralisations des groupes de Coxeter. Dans cette optique, Il est naturel de se demander si une telle algèbre possède une présentation par générateurs et relations comme son groupe de Coxeter.

Corollaire 2.1.3. *Soit (W,S) un groupe de Coxeter et $H := H(W,S,\{a_s,b_s\}_{s\in S})$ l'algèbre de Iwahori-Hecke associée sur l'anneau A.*

1. *Soit $w \in W$ et $s_{i_1} \dots s_{i_k}$ une expression réduite alors $T_w = T_{s_{i_1}} \dots T_{s_{i_k}}$.*
2. *On a la règle de multiplication suivante : pour tout $s \in S$ et $w \in W$, on a*

$$T_w T_s = \begin{cases} T_{ws} & \text{si } l(ws) > l(w) \\ a_s T_{ws} + b_s T_w & \text{sinon} \end{cases}$$

3. *On a une présentation de H par*
   – *générateurs : T_s avec $s \in S$.*
   – *relations : pour tout $(s,t) \in S^2$ avec $s \neq t$:*

$$\underbrace{T_s T_t T_s \dots}_{m_{st}} = \underbrace{T_t T_s T_t \dots}_{m_{st}}$$

et pour tout $s \in S$:

$$T_s^2 = a_s T_1 + b_s T_s$$

Démonstration. (1) suit du théorème précédent tandis que (2) se prouve aisément par récurrence sur $l(w)$ en utilisant (1) et la règle de multipliation. Il reste donc à montrer (3). Notons que dans H, on a bien les relations données par la règle de multiplication et par (1). Soit $\mathcal{G}$ est une A-algèbre engendrée par $\{g_s\}_{s \in S}$ avec les relations suivantes : pour tout $(s,t) \in S^2$ avec $s \neq t$:

$$\underbrace{g_s g_t g_s \dots}_{m_{st}} = \underbrace{g_t g_s g_t \dots}_{m_{st}}$$

et pour tout $s \in S$:

$$g_s^2 = a_s g_1 + b_s g_s$$

Il faut montrer que l'on a une unique morphisme de A-algèbres

$$\Phi : H \to \mathcal{G}$$

tel que $\Phi(T_s) = g_s$. L'unicité est évidente car Φ est un morphisme d'algèbres et les T_s engendrent H. On pose

$$\mathcal{M} = \left\{ g_{s_{i_1}} \dots g_{s_{i_k}} \mid k \in \mathbb{N},\ s_{i_j} \in S \right\}$$

On munit $\mathcal{M}$ d'une multiplication par concaténation ce qui fait de $\mathcal{M}$ un monoïde. Soit

$$f : S \to \mathcal{M}$$

tel que $f(s) = g_s$ pour tout $s \in S$. Par définition, on a

$$\underbrace{g_s g_t g_s \dots}_{m_{st}} = \underbrace{g_t g_s g_t \dots}_{m_{st}}$$

pour tout $(s,t) \in S^2$. Donc, on peut appliquer le théorème de Matsumoto : f se prolonge en une application

$$\Phi : W \to \mathcal{M}$$

tel que

$$\Phi(w) = g_w := g_{s_{i_1}} \dots g_{s_{i_k}}$$

dès que $s_{i_1} \dots s_{i_k}$ est une expression réduite pour w. L'application

$$\Psi : H \to \mathcal{G}$$

définie sur une base de H par $\Psi(T_w) := g_w$ $(w \in W)$ est donc bien défini. Reste à montrer que c'est un homomorphisme d'algèbres. Pour ceci, il suffit de montrer que pour tout $s \in S$ et $w \in W$, on a

$$\Psi(T_s T_w) = \Psi(T_s) \Psi(T_w)$$

Soit $s_{i_1} \dots s_{i_k}$ une expression réduite pour w, on considère deux cas

– Si $l(sw) > l(w)$, on a alors $T_sT_w = T_{sw}$. Le résultat est alors évident.
– Si $l(sw) < l(w)$, on peut alors supposer par la loi de simplification que $s_{i_1} = s$. On a alors

$$\begin{aligned}\Psi(T_sT_w) &= \Phi(a_sT_{sw} + b_sT_w)\\ &= a_sg_{sw} + b_sg_w\end{aligned}$$

d'autre part, on a :

$$\begin{aligned}g_sg_w &= g_s^2g_{sw}\\ &= a_sg_{sw} + b_sg_w\end{aligned}$$

d'où le résultat.

On a donc bien une présentation de H comme dans l'énoncé.

□

Remarque 2.1.4. Si a_s est inversible dans A, alors on remarque facilement par les relations ci-dessus que T_s est inversible dans H d'inverse $T_s^{-1} = a_s^{-1}T_s + a_s^{-1}b_sT_1$. Par conséquent, pour tout $w \in W$, T_w est inversible. De plus, si $s_{i_1}\dots s_{i_k}$ est une expression réduite de w, on a $T_w = T_{s_{i_k}}^{-1}\dots T_{s_{i_1}}^{-1}$.

Allons un peu plus loin dans l'étude de la structure d'algèbre de H. On connaît déjà une présentation, une base comme A-module. On va maintenant définir une application sur H qui va nous être très utile pour l'étude des représentations de H.

Proposition 2.1.5. *Soit $\tau : H \to A$ le morphisme de A-modules défini sur la base $\{T_w\}_{w\in W}$ de H par*

$$\tau(T_w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w = 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

pour tout $w \in W$. Alors, pour tout $(w, w') \in W^2$, on a

$$\tau(T_wT_{w'}) = \begin{cases} a_w & \text{si } w^{-1} = w'\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

où on a noté $a_w := a_{s_{i_1}}\dots a_{s_{i_k}}$ si $s_{i_1}\dots s_{i_k}$ est une expression réduite de w (ceci est bien défini d'après le corollaire 1.4.4). De plus, pour tout $(h, h') \in H^2$, on a

$$\tau(hh') = \tau(h'h)$$

On dit que τ est une fonction de trace *.*

Démonstration. On montre que l'on a pour tout $(w, w') \in W^2$,

$$\tau(T_wT_{w'}) = \begin{cases} a_w & \text{si } w^{-1} = w'\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

par récurrence sur $l(w)$.

- Si $l(w) = 0$, on a $w = 1$ et alors $\tau(T_1T_{w'}) = \begin{cases} 1 & \text{si } w = 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ ce qu'il fallait montrer.
- Soit $k > 0$. Comme $w \neq 1$, il existe $s \in S$ tel que $l(ws) < l(w)$. On a alors $T_{ws}T_s = T_w$. Il suit $T_wT_{w'} = T_{ws}T_sT_{w'}$. Deux cas sont à considérer :
  – si $l(sw') > l(w')$, on a alors $T_{sw'} = T_sT_{w'}$. Comme $l(ws) < k$, on a

$$\begin{aligned}\tau(T_wT_w') &= \tau(T_{ws}T_{sw'})\\ &= \begin{cases} a_w & \text{si } (ws)^{-1} = sw'\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\end{aligned}$$

  Comme $l(sw') < l(w')$ et comme $l(ws) > l(w)$, on a $w \neq w^{-1}$ donc dans ce cas, on a $\tau(T_wT_w') = 0$.

– si $l(sw') < l(w')$, on a alors $T_sT_{w'} = a_sT_{sw'} + b_sT_{w'}$. On a

$$\tau(T_wT_{w'}) = a_s\tau(T_{ws}T_{sw'}) + b_s\tau(T_{ws}T_{w'})$$

On a $ws \neq (w')^{-1}$. En effet, on a $l((w')^{-1}s) < l((w')^{-1})$ et $l(wss) > l(ws)$. Il suit donc $\tau(T_{ws}T_{w'}) = 0$ et donc

$$\tau(T_wT_{w'}) = a_s\tau(T_{ws}T_{sw'})$$

Deux cas sont à considérer :

- Soit $w' = w^{-1}$, alors $(ws)^{-1} = sw'$ d'où, par induction,

$$\tau(T_{ws}T_{sw'}) = a_{ws}$$

ce qui implique

$$\tau(T_wT_{w'}) = a_w$$

- soit $w' \neq w^{-1}$, alors $(ws)^{-1} \neq sw'$ et on obtient $\tau(T_wT_{w'}) = 0$

Ceci termine la démonstration. On a ainsi pour tout $(w, w') \in W^2$

$$\tau(T_wT_{w'}) = \tau(T_{w'}T_w)$$

ce qui implique que τ est une fonction de trace.

□

Ainsi, une algèbre de Iwahori-Hecke est muni d'une fonction de trace. Soit $w \in W$. Supposons que pour tout $w' \in W$, on ait $\tau(T_wT_{w'}) = 0$. Ceci implique que $a_w = 0$. Si A est intègre et les a_s tous non nuls, ceci n'arrive jamais. On dit alors que τ est une forme symétrisante pour H et que H est une algèbre symétrique. Dans la prochaine partie, nous allons étudier la théorie des représentations de telles algèbres.

2.2 Théorie des représentations des algèbres symétriques

Dans toute cette section, nous nous donnons une algèbre H associative et unitaire sur un corps K. On suppose de plus que comme K espace vectoriel, H est de dimension finie. Nous allons étudier la théorie des représentations de H lorsque celle-ci est équipée d'une fonction de trace comme l'algèbre de Iwahori-Hecke. Avant celà, rappelons quelques généralités de théorie des représentations.

Définition 2.2.1. Soit H une algèbre associative unitaire sur un corps K.

1. Soit V un K espace vectoriel. On dit qu'une application

$$\rho : H \to \mathrm{End}_K(V)$$

est une représentation de H si c'est un morphisme de K-algèbres. Dans ce cas, on a une action de H sur V définie par

$$\text{pour } h \in H \text{ et } v \in V \ h.v := \rho(h)(v).$$

qui muni V d'une structure de H-module.

2. Si ρ est une représentation qui fait de V un H-module, on définit :

$$\begin{array}{cccc} \chi_V : & H & \to & K \\ & h & \mapsto & \mathrm{tr}(\rho(h)) \end{array}$$

χ_V est appelé le caractère de V (ou de ρ). Si V est simple, on dit qu'il est irréductible.

3. Soit V un H-module, on dit que V est réductible si il possède un sous-module propre V' c'est à dire un sous espace vectoriel non nul et différent de V tel que

$$\text{Pour tout } h \in H \text{ et } v \in V' \text{ on a } h.v' \in V'$$

Si V n'est pas réductible, on dit qu'il est irréductible ou qu'il est simple.

4. Un morphisme de H-module est un morphisme de K-espace vectoriels

$$\varphi : V \to V'$$

tel que pour tout $v \in V$ et $h \in H$, on a

$$\varphi(h.v) = h.\varphi(v)$$

Si φ est bijective, on dit que φ est un isomorphisme de H-modules. On note

$$\mathrm{Irr}(H) = \{H - \text{modules irréductibles à isomorphismes près}\}$$

Les problèmes fondamentaux que l'on peut alors se poser sont de déterminer explicitement tous les modules simples de l'algèbre H et déterminer leurs dimensions. Soit maintenant V un H-module de dimension fini (comme K-espace vectoriel). Soit V est irréductible soit il existe un sous-module V_{n-1} de V que l'on suppose maximal. Alors le quotient V/V_{n-1} est un H-module et il est irréductible, sinon V_{n-1} ne serait pas maximal. Maintenant, soit V_{n-1} est irréductible, soit on dispose d'un nouveau sous-module maximal. Comme V est de dimension finie, ce procédé s'arrète à un moment donné. Bref, on a l'existence d'une chaîne de H-modules

$$V_0 \subset V_1 \subset \ldots V_{n-1} \subset V_n = V$$

tels que chaque quotient V_i/V_{i-1} est simple pour $i = 0, ..., n$. On dit que c'est une série de composition pour V. Un théorème important, le théorème de Jordan-Hölder, affirme que n et les classes d'isomorphies des V_i/V_{i-1} sont des invariants (voir par exemple [6, Th. 13.17]).

Soit ρ la représentation associée à V. Pour tout $i = 0, \ldots, n$, on définit la représentation irréductible associé au H-module simple V_i/V_{i-1} :

$$\rho_i : H \to \mathrm{End}_K(V_i/V_{i-1})$$

telle que pour tout $h \in H$ et $v(\mathrm{mod}\ V_{i-1}) \in V_i/V_{i-1}$:

$$\rho_i(h)(v(\mathrm{mod}\ V_{i-1})) = \rho(h)(v)(\mathrm{mod}\ V_{i-1})$$

ce qui est bien défini car V_{i-1} est invariant par ρ. Soit $\mathcal{B}_0$ une base de V_0, on la complète pour obtenir une base $\mathcal{B}_1$ de V_1 ... et finalement une base $\mathcal{B}$ de V. Sur la base $\mathcal{B}$, nous voyons que la matrice de $\rho(h)$ a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \rho_0(h) & 0 & \ldots & 0 \\ * & \rho_1(h) & \ldots & 0 \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & \ldots & \rho_n(h) \end{pmatrix}$$

ceci implique que

$$\chi = \sum_{i=0}^{n} \chi_{V_i/V_{i-1}}$$

et donc que tout caractère est somme de caractères de modules simples.

Attention, notons que comme K espace vectoriel, on a un isomorphisme naturel

$$V \simeq \bigoplus_{i=0}^{n} V_i/V_{i-1}$$

Par contre ce n'est pas un isomorphisme de H-modules et en général, un H-module n'est pas une somme direct de H-modules simples ! ceci ne reste vrai qu'au niveau des caractères. On peut néanmoins se demander quand une telle propriété est vrai. On parle dans ce cas, d'algèbre "semi-simple". La théorie des représentations de telles algèbres est beaucoup plus aisée à étudier que dans le cas général. C'est pourquoi un enjeu important est de déterminer un critère de "semi-simplicité".

Rappellons que lorsque K est assez grand (par exemple algébriquement clos), d'après le théorème de Wedderburn, on a alors un morphisme surjectif de K-algèbres :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & H & \to & \bigoplus_{V\in \mathrm{Irr}(H)} \mathrm{Mat}_{d_V}(K) \\ & h & \mapsto & (\rho_V(h))_{V\in \mathrm{Irr}(H)} \end{array}$$

et $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est un idéal nilpotent de H. On dit que l'algèbre est semi-simple si cet idéal est nul. L'application Φ devient alors un isomorphisme et on a alors

$$\dim_K(H) = \sum_{V\in \mathrm{Irr}(H)} (\dim(V))^2$$

Il est alors facile d'en déduire que l'ensemble

$$\{\chi_V \mid V \in \mathrm{Irr}(H)\}$$

est un système linéairement indépendant de $\mathrm{Hom}_K(H, K)$.

Il est donc naturel de chercher un critère simple de semi-simplicité. Un tel critère peut se donner dans le cadre des algèbres symétriques.

Définition 2.2.2. Une application K-linéaire $\tau : H \to K$ est dite une fonction de trace si pour tout $(h_1, h_2) \in H^2$, on a :

$$\tau(h_1h_2) = \tau(h_2h_1).$$

On définit alors la forme bilinéaire symétrique

$$\begin{array}{rccc} \beta_\tau : & H \times H & \to & K \\ & (h_1, h_2) & \mapsto & \tau(h_1h_2) \end{array}$$

si celle-ci est non dégénérée, on dit que τ est symétrisante et que H est une algèbre symétrique .

Exemple 2.2.3. Soit H l'algèbre des matrices à coefficients dans K avec d lignes et d colonnes. On considère la fonction de trace usuelle sur les matrices. Elle est clairement non dégénérée. Ainsi, H est une algèbre symétrique.

Exemple 2.2.4. Soit G un groupe fini d'élément neutre e. On pose $H = K[G]$ l'algèbre du groupe de K-base canonique $\{g \mid g \in G\}$. On définit une fonction de trace sur cette base en posant :

$$\tau(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ceci fait de $K[G]$ une algèbre symétrique.

Proposition 2.2.5. *On suppose K assez grand. Soit H une K-algèbre symétrique avec forme symétrisante τ. Alors H est semi-simple si et seulement si il existe une suite $(c_V)_{V\in Irr(H)}$ d'éléments de $K^\times$ uniquement définis tel que*

$$\tau = \sum_{V\in \mathrm{Irr}(H)} c_V \chi_V$$

dans ce cas, les éléments $(c_V)_{V\in \mathrm{Irr}(H)}$ s'appellent les degrés relatifs des modules simples.

Démonstration. On suppose que H est semi-simple alors on a un isomorphisme

$$H \simeq \bigoplus_{V\in \mathrm{Irr}(H)} \mathrm{Mat}_{d_V}(K)$$

Pour tout $V \in \mathrm{Irr}(H)$, notons $\mathrm{tr}_V : \mathrm{Mat}_{d_V}(K) \to K$ la fonction de trace canonique. Comme $\tau|_{\mathrm{Mat}_{d_V}(K)}$ est une fonction de trace sur $\mathrm{Mat}_{d_V}(K)$, il existe $c_V \in K$ tel que $\tau|_{\mathrm{Mat}_{d_V}(K)} = c_V \mathrm{tr}_V$. Ceci implique que :

$$\tau = \sum_{V\in \mathrm{Irr}(H)} c_V \chi_V$$

les c_V sont non nuls car la forme τ est non dégénérée. En effet, supposons que $c_V = 0$, on se donne un élément $h \in H$ tel que $\Phi(h) \in \mathrm{Mat}_{d_V}(K)$. Pour tout $h' \in H$, on a $\Phi(hh') \in \mathrm{Mat}_{d_V}(K)$ et donc $\tau(hh') = 0$ ce qui est absurde.

Réciproquement, on veut montrer que Φ est un isomorphisme. On sait que $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est un idéal nilpotent. Soit $h \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ donc pour tout $h' \in H$, on a $hh' \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. Donc hh' est nilpotent. Ainsi, pour toute représentation de H, $\rho(hh')$ est nilpotent. Ainsi, pour tout $V \in \mathrm{Irr}(H)$, on a $\chi_V(hh') = 0$. Donc $\tau(hh') = 0$ ce qui implique que $h = 0$ et donc que $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$. □

2.3 Conséquences sur les algèbres de Iwahori-Hecke

Retournons maintenant au cas des algèbres de Iwahori-Hecke. Avant de considérer le cas complètement général, nous nous intéressons au cas des algèbres de groupes. Soit (W, S) un système de Coxeter. Soit K un corps et soit $\{a_s, b_s\}_{s\in S}$ une suite d'éléments de K. On considère l'algère de Iwahori-Hecke H associée à ces données.

Tout d'abord, intéressons-nous à un cas particulier. Prenons le cas où $a_s = 1$ et $b_s = 0$ pour tout $s \in S$, c'est à dire le cas de l'algèbre de groupe. On a déjà vu que dans ce cas, $H = K[W]$ est équipé d'une fonction de trace symétrisante. La proposition 2.2.5 entraîne le résultat suivant concrenant l'algèbre d'un groupe fini quelconque.

Théorème 2.3.1 (Théorème de Maschke)**.** *Si K est un corps de caractéristique nulle ou première avec l'ordre d'un groupe G fini, alors l'algèbre de groupe $K[G]$ est semi-simple. En particulier, pour tout groupe de Coxeter fini, si K est de caractéristique nul alors $K[W]$ est semisimple*

Démonstration. On considère la représentation suivante de $H = K[G]$ appelée représentation régulière. Notons $\{g \mid g \in G\}$ la base canonique.

$$\begin{array}{rccc} \rho : & H & \to & \mathrm{End}_K H \\ & g & \mapsto & (g' \mapsto g.g') \end{array}$$

On vérifie facilement que la caractère associée vérifie pour tout $g \in G$:

$$\chi_{\mathrm{reg}}(g) \begin{cases} |G| & \text{si } g = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a donc $\chi_{\text{reg}} = |G|\tau$.

D'autre part, on sait que le caractère de la représentation régulière vérifie :

$$\chi_{\text{reg}} = \sum_{V \in \text{Irr}(H)} \dim_K(V)\chi_V$$

comme les valeurs de $\dim_K(V)$ divisent l'ordre de G, on en déduit que dans K, ces valeurs sont non nulles. On obtient donc :

$$\tau = \frac{1}{|G|} \sum_{V \in \text{Irr}(H)} \dim_K(V)\chi_V$$

qui, en utilisant la proposition 2.2.5, nous permet de conclure.

□

Quand est il maintenant du cadre général ? Soit H une algèbre de Iwahori-Hecke d'un système de Coxeter (W, S) sur un corps K associé au choix de paramètres $\{a_s, b_s\}_{s \in S} \subset K^\times$. Alors la fonction K-linéaire définie sur la base $\{T_w \mid w \in W\}$ de H par

$$\tau(T_w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w \neq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout $w \in W$, est une fonction de trace symétrisante.

Dans le cas où l'algèbre est semi-simple, on a une décomposition de la fonction de trace

$$\tau = \sum_{V \in \text{Irr}(H)} c_V \chi_V$$

Les éléments $s_V = 1/c_V$ jouent un rôle fondametale dans la théorie des représentations des algèbres de Iwahori-Hecke. Ils sont appelées les éléments de Schur.

On a donc vu que la fonction de trace de l'algèbre de Iwahori-Hecke se déduisait facilement de celle de l'algèbre de groupe. On peut alors maintenant se demander si il n'existe pas des rapport plus profond entre les théories des représentations de ces deux algèbres, par exemple, leurs nombres de représentations irréductibles, les dimensions de celles-ci etc. De même, un problème intéressant serait de donner un critère analogue au théorème de Maschke pour les algèbres de Iwahori-Hecke. Ce sont les principaux objectifs du chapitre suivant.

Chapitre 3

Représentations d'algèbres de Iwahori-Hecke

Dans ce chapitre, on désire étudier la théorie des représentations d'algèbres de Iwahori-Hecke arbitraire. La première question que l'on peut se poser est la suivante : etant donné un système de Coxeter, existe-t-il une algèbre de Iwahori-Hecke "universel" tel que tout algèbre de Iwahori-Hecke associé à ce même système de Coxeter (mais sur un anneau et avec des parametres a priori différent) se déduit de celle-ci ? Nous verrons qu'il est possible de définir une telle algèbre grâce au processus de spécialisation.

Ensuite, une question naturelle est de se demander comment comparer la théorie des représentation de cette algèbre "universelle" avec celle d'une algèbre de Iwahori-Hecke obtenue après cette phase de spécialisation. Un objet fondamental : la matrice de décomposition permettra de donner des informations sur ce problème. Nous verrons que la question de semi-simplicité abordée dans le chapitre précédent sera capitale dans cette optique. Nous énoncerons un théorème important qui permet de montrer que dans le cas semi-simple, les représentations de l'algèbres de Iwahori-Hecke sont essentiellement obtenus à partir de celle de l'algèbre de groupe.

Dans ce chapitre, la principale référence est le livre de M. Geck et G. Pfeiffer [9], en particulier le chapitre 7 et le cours de M. Geck [7]. La dernière partie s'inspire de [12].

3.1 Le procédé de spécialisation

Tout d'abord, nous introduisons une algèbre de Iwahori-Hecke particulière associé à un système de Coxeter. Celle-ci va jouer le rôle "d'algèbre universelle" dans toute la suite de ce document.

Définition 3.1.1. Soit (W, S) un système de Coxeter et soit $\{a_s, b_s\}_{s\in S}$ un ensemble d'indéterminées vérifiant la condition $(\star)$. On définit l'anneau

$$\mathcal{A} := \mathbb{Z}[a_s^{\pm 1}, b_s \mid s \in S].$$

L'algèbre de Iwahori-Hecke $H := H_{\mathcal{A}}(W, S, \{a_s, b_s\}_{s\in S})$ s'appelle l'algèbre de Iwahori-Hecke générique.

La particularité de cette algèbre est que tout algèbre s'obtient à partir de celle-ci après "spécialisation", terme que nous définissons ci-dessous.

Définition 3.1.2. Soit H une algèbre sur un anneau A et soit $\theta : A \to R$ un morphisme d'anneaux où R est un anneau commutatif unitaire. On dit que θ est une spécialisation.

Par extension des scalaires, R peut se voir comme un A-module via θ. On définit alors

$$H_R^\theta := R \otimes_A H.$$

On dit que H_R^θ est obtenue à partir de H par spécialisation.

Notons que pour toute spécialisation $\theta : A \to R$ l'algèbre obtenue est une R-algèbre libre de rang fini, une base étant obtenue par spécialisation d'une base de H.

Exemple 3.1.3. Soit G un groupe fini et $\mathbb{Z}[G]$ l'algèbre de groupe sur $\mathbb{Z}$. Alors il existe un unique morphisme d'anneau $\theta : \mathbb{Z} \to A$. L'algèbre spécialisée est l'algèbre

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G] \simeq A[G]$$

Ainsi, si H est une algèbre de Iwahori-Hecke d'un système de Coxeter sur A et si $\theta : A \to R$ est une spécialisation, H_R^θ n'est autre que l'algèbre de Iwahori-Hecke de (W, S) sur l'anneau R avec paramètres $\{\theta(a_s), \theta(b_s)\}_{s\in S}$.

Proposition 3.1.4. *Soit (W, S) un système de Coxeter. Alors pour tout anneau commutatif unitaire et tout choix de paramètres $\{u_s, v_s\}_{s\in S}$ vérifiant $(\star)$, l'algèbre de Iwahori-Hecke $H_A(W, S, \{u_s, v_s\}_{s\in S})$ est obtenue à partir de l'algèbre de Iwahori-Hecke générique $H_{\mathcal{A}}$ après spécialisation.*

Démonstration. Il suffit de remarquer qu'il existe un morphisme d'anneau

$$\begin{array}{cccc} \theta : & \mathcal{A} & \to & A \\ & a_s & \mapsto & u_s \\ & b_s & \mapsto & v_s \end{array}$$

et on a

$$\begin{array}{rcl} H_A^\theta & = & A \otimes_{\mathcal{A}} H_{\mathcal{A}} \\ & \simeq & H_A(W, S, \{u_s, v_s\}_{s\in S}) \end{array}$$

□

Grâce à ce procédé, on peut obtenir, pour tout anneau A, l'algèbre du groupe associée à un système de Coxeter (W, S) sur un anneau A à partir de l'algèbre générique en utilisant la spécialisation

$$\begin{array}{cccc} \theta : & \mathcal{A} & \to & A \\ & a_s & \mapsto & 1 \\ & b_s & \mapsto & 0 \end{array}$$

Ainsi, l'algèbre $A[W]$ est obtenue à partir de l'algèbre générique. On peut alors se demander si la théorie des représentations de l'une ne peut pas être obtenues à partir d'informations sur l'autre algèbre. De même, quels sont les liens unissant les représentations de l'algèbre générique avec celles d'algèbres de Iwahori-Hecke arbitraires ? L'objectif des deux sections suivantes. est d'étudier ce type de problèmes.

3.2 Matrices de décomposition

La question principale traitée ici est la suivante : peut-on "spécialiser" des représentations ? et des caractères ? si oui, les caractères irréductibles de l'algèbre générique se spécialisent-ils en des caractères irréductibles ? Pour répondre à ces questions, nous introduisons une classe d'objets fondamentaux : les anneaux de valuations.

Définition 3.2.1. Soit K un corps, un sous-anneau $\mathcal{O}$ de K est appelé un anneau de valuation si pour tout $x \in K^\times$, on a $x \in \mathcal{O}$ ou $x^{-1} \in \mathcal{O}$.

Exemple 3.2.2. Prenons $K = \mathbb{Q}$. Soit p un nombre premier alors

$$\mathcal{O} := \left\{ \frac{a}{b} \mid p \text{ ne divise pas } b \right\}$$

est un anneau de valuation de $\mathbb{Q}$.

Le premier objectif est d'établir l'existence d'anneaux de valuations qui nous servirons pour établir nos spécialisations de représentations. La proposition suivante donne une idée de la structure des anneaux de valuations.

Proposition 3.2.3. *Soit K un corps et $\mathcal{O}$ un anneau de valuation alors si I et J sont deux idéaux de $\mathcal{O}$, on a $I \subset J$ ou $J \subset I$.*

Démonstration. Si I n'est pas contenu dans J, il existe $x \in I$ tel que $x \notin J$. Soit $y \in J$. On a $xy^{-1} \notin \mathcal{O}$ sinon $y(xy^{-1}) = x \in J$. Donc, on a $(xy^{-1})^{-1} = x^{-1}y \in \mathcal{O}$. Ceci implique que $(x^{-1}y)x = y \in I$. On obtient donc $J \subset I$ ce qu'il fallait montrer.

□

Proposition 3.2.4. *Soit K un corps et $A \subset K$ un sous-anneau. Soit $\mathfrak{p} \subset A$ un idéal premier. Alors, il existe un anneau de valuation $\mathcal{O}$ local avec un idéal maximal $\mathfrak{m}$ vérifiant $A \subset \mathcal{O}$ et $\mathfrak{m} \cap A = \mathfrak{p}$.*

Démonstration. La preuve se fait en plusieurs étapes :

1. On construit tout d'abord l'anneau $\mathcal{O}$ avec un idéal maximal $\mathfrak{m}$. On considère l'ensemble

   $$\mathcal{M} := \{(R, \mathfrak{q}) \mid R \subset K,\ A \subset R,\ \mathfrak{q} \text{ idéal premier de } R \text{ tel que } \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}\}$$

   On applique le lemme de Zorn à ce sous-ensemble muni du pré-ordre suivant :

   $$(R, \mathfrak{q}) \leq (R', \mathfrak{q}') \iff R \subset R' \text{ et } \mathfrak{q} = \mathfrak{q}' \cap R$$

   On vérifie les hypothèses du lemme :
   – On a $\mathcal{M} \neq \emptyset$ car $(A, \mathfrak{p}) \in \mathcal{M}$.
   – Toute chaîne ordonnée est inductive. En effet, soit $(R_i, \mathfrak{q}_i) \in \mathcal{M}$ tel que $R_i \subset R_{i+1}$ et $\mathfrak{q}_i = R_i \cap \mathfrak{q}_{i+1}$ pour tout $i \in I$ un ensemble d'indices. On considère le couple $(\cup_{i\in I} R_i, \cup_{i\in I} \mathfrak{q}_i)$. L'ensemble $\cup_{i\in I} R_i$ est bien un anneau contenu dans K qui contient A et $\cup_{i\in I} \mathfrak{q}_i$ est un idéal vérifiant :

     $$A \cap (\cup_{i\in I} \mathfrak{q}_i) = \cup_{i\in I}(A \cap \mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}$$

     On a bien $R_j \subset \cup_{i\in I} R_i$ et $\mathfrak{q}_j = R_j \cap (\cup_{i\in I} \mathfrak{q}_i)$ pour tout $j \in I$ d'où le résultat. Ainsi d'après le lemme de Zorn, il existe un unique élément $(\mathcal{O}, \mathfrak{m})$ dans $\mathcal{M}$ maximal.

2. $\mathcal{O}$ est un anneau local avec idéal maximal $\mathfrak{m}$. En effet, posons

   $$\begin{array}{rcl} \widehat{\mathcal{O}} & = & \left\{ab^{-1} \mid a \in \mathcal{O}, b \in \mathcal{O} \setminus \mathfrak{m}\right\} \subset K \\ \widehat{\mathfrak{m}} & = & \left\{ab^{-1} \mid a \in \mathfrak{m}, b \in \mathcal{O} \setminus \mathfrak{m}\right\} \end{array}$$

   $(\widehat{\mathcal{O}}, \widehat{\mathfrak{m}})$ est local. Ceci suit de la propriété :

   $$x \notin \widehat{\mathfrak{m}} \iff x \in \widehat{\mathcal{O}}^{\times}$$

   Ainsi $\widehat{\mathfrak{m}}$ est maximal donc premier dans $\widehat{\mathcal{O}}$.

On montre alors que $(\widehat{\mathcal{O}}, \widehat{\mathfrak{m}})$ est dans $\mathcal{M}$ et que pour tout élément $(\mathcal{O}', \mathfrak{m}') \in \mathcal{M}$, on a

$$(\mathcal{O}', \mathfrak{m}') \leq (\widehat{\mathcal{O}}, \widehat{\mathfrak{m}}),$$

et par maximalité, on obtient

$$(\mathcal{O}, \mathfrak{m}) = (\widehat{\mathcal{O}}, \widehat{\mathfrak{m}}).$$

3. On montre maintenant que $\mathcal{O}$ est un anneau de valuation. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $x \in K$ tel que $x \notin \mathcal{O}$ et $x^{-1} \notin \mathcal{O}$. On considère alors le sous anneau $R := \mathcal{O}[x]$ de K.

   Montrons que l'idéal $R\mathfrak{m}$ est égal à R. On a $R\mathfrak{m} \subset R$ car $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}$. Supposons que $R\mathfrak{m} \neq R$. Il existe alors un idéal maximal $\mathfrak{n}$ tel que $R\mathfrak{m} \subset \mathfrak{n} \subsetneq R$. On a $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{n} \cap \mathcal{O}$. Par maximalité, on a $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap \mathcal{O}$. On a donc $(\mathcal{O}, \mathfrak{m}) \leq (R, \mathfrak{n})$ dans $\mathcal{M}$. Par maximalité, on obtient $(\mathcal{O}, \mathfrak{m}) = (R, \mathfrak{n})$ et donc $x \in \mathcal{O}$ ce qui est absurde. Bref, on a $R\mathfrak{m} = R$. En particulier, on a $1 \in R\mathfrak{m}$. Ainsi, il existe $r_0, r_1, \ldots, r_n$ une suite d'éléments de $\mathfrak{m}$ telle que

$$1 = \sum_{i=0}^{n} r_i x^i$$

   On a donc $1 - r_0 = \sum_{i=1}^{n} r_i x^i$. Or $1 - r_0 \in \mathcal{O}^{\times}$ car $\mathcal{O}$ est local. Donc il existe une suite d'éléments $r'_0, r'_1, \ldots, r'_n$ de $\mathcal{O}$ telle que

$$1 = \sum_{i=1}^{n} r'_i x^i.$$

   Ainsi, on obtient :

$$x^{-n} = \sum_{i=1}^{n} r'_i x^{i-n} \in \mathcal{O}[x^{-1}].$$

   Ainsi, l'anneau $\mathcal{O}[x^{-1}]$ est engendré par $\mathcal{O}$ et l'ensemble $\{x^{-i}\}_{i=0,\ldots,n-1}$.
   On répète maintenant l'argument précédent avec l'anneau $R = \mathcal{O}[x^{-1}]$ et on obtient $R = \mathfrak{m}R$. Ainsi, on a

$$\mathcal{O}[x^{-1}] = \mathfrak{m}\mathcal{O}[x^{-1}]$$

   où $\mathcal{O}[x^{-1}]$ est un $\mathcal{O}$ module de type fini. On a donc $\mathcal{O}$ un anneau commutatif unitaire, R un $\mathcal{O}$ module de type fini et $R = \mathfrak{m}R$. On peut appliquer le lemme de Nakayama qui nous dit qu'il existe $a \in \mathfrak{m}$ tel que $(1 + a)R = 0$. C'est absurde car $(1 + a)$ inversible. On a donc $\mathcal{O}[x^{-1}] = \mathcal{O}$ ce qui est une contradiction.

   Donc $\mathcal{O}$ est un anneau de valuation avec un unique idéal maximal $\mathfrak{m}$ vérifiant $A \subset \mathcal{O}$ et $\mathfrak{m} \cap A = \mathfrak{p}$.

□

On se place maintenant dans la situation suivante :
- A est un anneau intègre,
- K est un corps contenant A,
- H est une A-algèbre unitaire libre de rang fini de base $\{h_1, \ldots, h_m\}$ (où on suppose que h_1 est l'élément unité).,
- $H_K := K \otimes_A H$ est une K-algèbre de dimension finie.

La proposition suivante est le résultat-clef qui va nous permettre de spécialiser les représentations d'algèbres de Iwahori-Hecke génériques.

Proposition 3.2.5. *Soit $\mathcal{O} \subset K$ un anneau de valuation tel que $A \subset \mathcal{O}$. Alors pour tout H_K-module V de dimension d, il existe une base $\mathcal{B}$ de V telle que la représentation correspondante :*

$$\rho_{\mathcal{B}} : H_K \to Mat_d(K)$$

vérifie $\rho_{\mathcal{B}}(h) \in Mat_d(\mathcal{O})$ pour tout $h \in H_{\mathcal{O}}$.

Démonstration. Soit $\{v_1, \ldots, v_d\}$ une K-base de V. Alors, $\{1 \otimes h_1, \ldots, 1 \otimes h_m\}$ est une K-base de H_K. On considère le $\mathcal{O}$-module $\widetilde{V}$ de type fini engendré par les éléments $h_j.v_i$ avec $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq m$. On a $\widetilde{V} \subset V$. Notons que l'on a $K \otimes_{\mathcal{O}} \widetilde{V} = V$ car $\widetilde{V}$ contient une K-base de V.

Montrons que $\widetilde{V}$ est libre de type fini comme $\mathcal{O}$-module. On sait que $\mathcal{O}$ est local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. On considère le $\mathcal{O}/\mathfrak{m}$-module de type fini $\widetilde{V}/\mathfrak{m}\widetilde{V}$. Comme $F := \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ est un corps et que $\widetilde{V}$ est de type fini comme $\mathcal{O}$-module, c'est en fait un espace vectoriel de dimension finie.

Soit $\{\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_s\}$ une F-base de $\widetilde{V}/\mathfrak{m}\widetilde{V}$. Pour tout $i = 1, \ldots, s$, on choisit un représentant u_i de $\widetilde{u}_i \in \widetilde{V}/\mathfrak{m}\widetilde{V}$ dans $\widetilde{V}$. On considère le $\mathcal{O}$-module U engendré par $u_1, \ldots, u_s$. On a

$$\widetilde{V} = \mathfrak{m}\widetilde{V} + U$$

Par un corollaire du Lemme de Nakayama, $\mathcal{O}$ étant local, on obtient

$$\widetilde{V} = U$$

Il reste à montrer que $\{u_1 \ldots, u_s\}$ est un système linéairement indépendant sur $\mathcal{O}$. Soit $r_1, \ldots, r_s$ une suite d'éléments de $\mathcal{O}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{s} r_i u_i = 0.$$

Par l'absurde, supposons qu'il existe un élément r_i non nul. On peut supposer qu'on a suite d'idéaux de $\mathcal{O}$ vérifiant

$$(r_1) \subset (r_2) \subset \ldots \subset (r_s).$$

d'après la proposition 3.2.3. On a donc $r_s \neq 0$.

On a alors $r_s^{-1} r_i \in \mathcal{O}$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Il suit ainsi

$$\sum_{i=1}^{s-1} r_s^{-1} r_i u_i + u_s = 0$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{s-1} \overline{r_s^{-1} r_i} \widetilde{u}_i + \widetilde{u}_s = 0$$

ce qui est absurde car les éléments de $\{\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_s\}$ sont linéairement indépendant.

Donc $\widetilde{V}$ est libre de type fini comme $\mathcal{O}$-module de base $\{u_1 \ldots, u_s\}$. Alors, $\{1 \otimes_{\mathcal{O}} u_1 \ldots, 1 \otimes_{\mathcal{O}} u_s\}$ est une K-base de $K \otimes_{\mathcal{O}} \widetilde{V} = V$. De plus, $\widetilde{V}$ est $H_{\mathcal{O}}$-invariant d'où le résultat.

□

On va maintenant pouvoir définir l'objet fondamental pour l'étude des représentations d'algèbres de Iwahori-Hecke : la matrice de décomposition. Pour ceci, nous nous plaçons dans la situation suivante. Nous donnons une définition dans un cadre général bien que la principale application concernera les algèbres de Iwahori-Hecke.

- Soit A un anneau intègre,
- Soit K la clôture algébrique du corps des fractions de A
- Soit H une A-algèbre de rang fini comme A-module.
- Soit $\theta : A \to L$ un morphisme dans un corps L qui est le corps des fractions de $\theta(A)$.
- Soit $\mathcal{O}$ un anneau de valuation avec idéal maximal $\mathfrak{m}$ vérifiant $A \subset \mathcal{O}$ et $\mathfrak{m} \cap A = \mathrm{Ker}(\theta)$ (voir la proposition 3.2.4).
- Soit $\Pi : \mathcal{O} \to F := \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ la surjection canonique. Alors L peut se voir comme un sous-corps de F via l'injection de $\theta(A)$ dans F qui envoie, pour $a \in A$, $\theta(a)$ sur $a + \mathfrak{m} \in F$. Comme L est le corps des fractions de $\theta(A)$, on peut supposer $L \subset F$.

Exemple 3.2.6. On peut par exemple se placer dans une des situations suivantes :

1. $A = \mathbb{Z}$, $K = \overline{\mathbb{Q}}$, $H = \mathbb{Z}W$ où W est un groupe de Weyl et $\theta : \mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ tel tel que $\theta(1_{\mathbb{Z}}) = 1_{\mathbb{F}_p}$. On peut alors spécialiser H et on a $H^{\theta}_{\mathbb{F}_p} \simeq \mathbb{F}_p W$.
2. $A = \mathcal{A}$, K la clôture algébrique de $\mathrm{Frac}(\mathcal{A})$, H l'algèbre de Iwahori Hecke générique associé à W un groupe de Weyl. $\theta : \mathcal{A} \to \mathbb{Q}$ tel tel que $\theta(a_s) = 1$ et $\theta(b_s) = 0$ pour tout $s \in S$. On peut alors spécialiser H et on a $H^{\theta}_{\mathbb{F}_p} \simeq \mathbb{Q}W$.

Proposition 3.2.7. *En gardant les notations ci-dessus, on a les propriétés suivantes.*

1. *F est la clôture algébrique de L.*
2. *On note*
$$\mathrm{Irr}(H_K) = \{\chi_1, \ldots, \chi_m\}$$
Alors on sait que ces caractères sont à valeurs dans $\mathcal{O}$ d'après la proposition 3.2.5. Alors, pour tout $i = 1, \ldots, m$,
$$\begin{array}{cccc} \overline{\chi}_i : & H_F & \to & F \\ & 1 \otimes h & \mapsto & \pi(\chi_i(h)) \end{array}$$
est le caractère d'un H_F-module.
3. *Supposons $\mathrm{car}(F) = 0$ et notons*
$$\mathrm{Irr}(H_F) = \{\psi_1, \ldots, \psi_l\}$$
Alors pour tout $i = 1, \ldots, m$, il existe des nombres d_{ij} avec $j = 1, \ldots, l$ appelés nombres de décompositions *uniquements définis tels que*
$$\overline{\chi}_i = \sum_{j=1}^{l} d_{ij} \psi_j$$
La matrice $D := (d_{ij})_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m}$ s'appelle la matrice de décomposition.

Démonstration. 1. On montre tout d'abord que F est algébriquement clos. Soit $f \neq 0$ dans $F[X]$ un polynôme unitaire. On a
$$f = \sum_{i=0}^{s} a_i X^i.$$
où $a_i = \pi(b_i)$ avec $b_i \in \mathcal{O}$ et $a_n = 1$. On pose alors
$$\widetilde{f} = \sum_{i=0}^{s} b_i X^i \in \mathcal{O}[X]$$

Dans $K[X]$, K étant algébriquement clos, il existe $x \in K$ tel que $\widetilde{f}(x) = 0$. On a donc :

$$x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0 = 0$$

Si $x \in \mathcal{O}$ alors on a bien une racine de f dans F. Sinon, on a $x^{-1} \in \mathcal{O}$ alors

$$x + b_{n-1} + b_{n-2}x^{-1} + \ldots + b_0 x^{-(n+1)} = 0$$

et donc $x \in \mathcal{O}$ d'où le résultat. On obtient donc $f(\overline{x}) = 0$ d'où le résultat. On montre maintenant que F/L est algébrique. Soit $x \in F$ et soit $y \in \mathcal{O}$ tel que $x = \pi(y)$. K est la clôture algébrique du corps des fractions de A donc il exite un polynôme $g \in \mathrm{Frac}(A)[X]$ tel que $g(y) = 0$. Donc il existe un polynôme $f = \sum_{i=1}^{s} a_i X^i$ dans $A[X]$ tel que $f(y) = 0$.
Supposons qu'il existe $i = 1, \ldots, s$ tel que $a_i \notin \mathfrak{m}$ alors $\overline{f}$ est un polynôme non nul à coefficent dans F qui possède y comme racine.
Supposons que pour tout $i = 1, \ldots, s$, $a_i \in \mathfrak{m}$. Alors, pour tout $i = 1, \ldots, s$, (a_i) est un idéal de $\mathcal{O}$. Comme dans la preuve précédente, il existe $k \in \{1, \ldots, s\}$ tel que

$$(a_i) \subset (a_k)$$

pour tout $i = 1, \ldots s$. Donc pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, il existe $u_i \in \mathcal{O}$ tel que $a_i = u_i a_k$. On a $a_k \neq 0$ car $f \neq 0$. On obtient

$$h := a_k^{-1} f = \sum_{i=1}^{s} (a_k^{-1} a_i) X^i$$

et $h(y) = 0$ avec $h \neq 0$ dans L (car au moins un des coefficients est non nul).

2. Donnons nous une représentations irréductible ρ de H_K dans $\mathrm{Mat}_d(K)$. On sait, d'après la proposition 3.2.5, qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de V tel que $\rho(h) \in \mathrm{Mat}_d(\mathcal{O})$ pour tout $h \in H$. On a $H_F = F \otimes_{\mathcal{O}} H_{\mathcal{O}}$ (c'est l'algèbre spécialisée via la surjection canonique $\mathcal{O} \to F := \mathcal{O}/\mathfrak{m}$). Alors en passant au quotient, on a une représentation

$$\begin{array}{cccc} \overline{\rho}: & H_F & \to & \mathrm{Mat}_d(F) \\ & 1 \otimes_{\mathcal{O}} h & \mapsto & \overline{\rho(h)} \end{array}$$

et pour tout $h \in H_{\mathcal{O}}$, on a

$$\mathrm{tr}(\overline{\rho}(1 \otimes h)) = \pi(\chi(h)).$$

3. Ceci suit du fait que tout caractères de H_F s'écrit comme combinaison linéaire des caractères irréductibles de H_F.

$\square$

La matrice de décomposition est un objet fondamental de la théorie des représentations. Le point est que, en pratique, les caractères de H_K sont plus faciles à calculer comme on le verra plus tard. Connaître parfaitement la matrice de décompositions permettra de déterminer les caractères irréductibles de H_F. Quelques exemples seront présentés dans les sections suivantes. Avant ceci, nous cherchons à déterminer quand la matrice de décomposition est triviale.

3.3 Le théorème de déformation de Tits

Le théorème suivant est un des théorème clef de l'étude des représentations d'algèbres de Hecke. On garde ici les notations de la section précédente.

Théorème 3.3.1 (Théorème de déformation de Tits)**.** *Dans la même situation que dans la section précédente, si l'algèbre H_F est semi-simple (avec car$(F) = 0$)alors H_K l'est aussi et on $D = \mathrm{Id}$.*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Irr}(H_K) & \leftrightarrow & \mathrm{Irr}(H_F) \\ \chi & \leftrightarrow & \overline{\chi} \end{array}$$

Démonstration. Notons comme dans la proposition précédente

$$\mathrm{Irr}(H_K) = \{\chi_1, \ldots, \chi_m\}$$

et

$$\mathrm{Irr}(H_F) = \{\psi_1, \ldots, \psi_l\}$$

Pour tout $i = 1, \ldots, m$, il existe des nombres de décomposition d_{ij} avec $j = 1, \ldots, l$ tels que

$$\overline{\chi}_i = \sum_{j=1}^{l} d_{ij}\psi_j$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ (resp. $j \in \{1, \ldots l\}$), notons V_i (resp. U_j) le H_K-module (resp. H_F-module) associé, on a :

$$\begin{array}{rcl} \dim(V_i) & = & \chi_i(1) \\ & = & \overline{\chi}_i(1) \\ & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{l} d_{ij}\psi_j(1) \\ & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{l} d_{ij}\dim(U_j) \end{array}$$

Il suit ainsi :

$$\dim(V_i)^2 \geq \sum_{j=1}^{l} d_{ij}^2 \dim(U_j)^2.$$

Or, on sait que en prenant les notations de §2.2

$$\dim(H_K/\mathrm{Ker}(\Phi)) = \sum_{i=1}^{m} \dim(V_i)^2$$

Maintenant, on a :

$$\sum_{i=1}^{m} \dim(V_i)^2 \geq \sum_{j=1}^{l} (\sum_{i=1}^{m} d_{ij}^2) \dim(U_j)^2$$

Or, pour tout $j = 1, \ldots, l$, le nombre $(\sum_{i=1}^{m} d_{ij}^2)$ est non nul. Pour voir ceci, on regarde les caractères des représentations régulières $\chi_{\mathrm{reg},K}$ et $\chi_{\mathrm{reg},F}$ de H_K et H_F. Il existe des entiers tous non nuls u_i tels que $\chi_{\mathrm{reg},K} = \sum_{i=1}^{m} u_i\chi_i$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} \chi_{\mathrm{reg},H_F} & = & \overline{\chi_{\mathrm{reg},H_K}} \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} u_i \overline{\chi_i} \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l} u_i d_{ij}\psi_j \\ & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{l}(\sum_{i=1}^{m} u_i d_{ij})\psi_j \end{array}$$

Il suit que pour tout $j \in \{1, \ldots, l\}$, on a $(\sum_{i=1}^{m} u_i d_{ij}) \neq 1$ et donc que pour tout $j \in \{1, \ldots, l\}$, il existe au moins un $i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $d_{ij} \neq 0$. On obtient donc

$$\dim(H_K/\mathrm{Ker}(\Phi)) \geq \sum_{i=1}^{m} \dim(U_i)^2$$

Or par le théorème de Wedderburn, H_F est semi-simple ce qui implique que

$$\dim(H_F) = \sum_{i=1}^{m} \dim(U_i)^2$$

Donc, on a

$$\dim(H_K/\mathrm{Ker}(\Phi)) \geq \dim(H_F)$$

Mais on sait que $\dim(H_F) = \dim(H_K)$. On obtient ainsi $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$ et donc H_K est semi-simple. De plus, on a $(\sum_{i=1}^{m} d_{ij}^2) = 1$ pour tout $j \in \{1, \ldots, l\}$. donc D est une matrice de permutation. Quitte à réordonner lignes et colonnes on a $D = \mathrm{Id}$ et on a la bijection désirée au niveau des caractères. $\square$

Analysons maintenant un cas particulier. Considérons l'algèbre de Iwahori-Hecke générique $H_{\mathcal{A}}$ et étendons les scalaires en définissant l'algèbre

$$H_{\mathbb{C}} := \mathbb{C}[u_s, v_s \mid s \in S] \otimes_{\mathcal{A}} H_{\mathcal{A}}.$$

On considère la spécialisation :

$$\theta : \mathbb{C}[u_s, v_s \mid s \in S] \to \mathbb{C}$$

tel que $\theta(u_s) = q$ et $\theta(v_s) = q - 1$ pour un $q \in \mathbb{C}^\times$ pour tout $s \in S$. On a alors une algèbre spécialisée H_q sur $\mathbb{C}$. Si on reprend les notations ci-dessous, soit K la clôture algébrique du corps des fractions de $\mathbb{C}[u_s, v_s \mid s \in S]$. Il existe donc un anneau de valuation contenu dans $\mathbb{C}[u_s, v_s \mid s \in S]$ et un idéal maximal $\mathfrak{m}$ tels que

$$\mathfrak{m} \cap \mathbb{C}[u_s, v_s \mid s \in S] = \mathrm{Ker}(\theta)$$

$F = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ est la clôture algébrique du corps des fractions de l'image de θ, c'est donc $\mathbb{C}$. D'après le théorème ci-dessus, on obtient que si H_q est semi-simple alors H_K l'est aussi. Prenons en particulier $q = 1$, alors H_q est l'algèbre du groupe $\mathbb{C}[W]$ qui est semi-simple d'après le théorème de Maschke. On a donc prouvé le résultat suivant :

Corollaire 3.3.2. *Soit K la clôture algébrique de $\mathbb{C}(u_s, v_s \mid s \in S)$. Alors H_K est semi-simple. En particulier, ces modules simples sont en bijection avec ceux de $\mathbb{C}[W]$.*

Notons de plus que dans la situation ci-dessus, les représentations irréductibles de $\mathbb{C}[W]$ sont simplement obtenus à partir de celles de H_K en spécialisant les paramètres.

3.4 Exemples

Dans toute cette partie, nous considérons le groupe de Coxeter de type A_2 engendré par les réflexions simples $\{s, t\}$. Ce groupe est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ et ses éléments sont $\{1, s, t, st, ts, sts = tst\}$. En premier lieu, on cherche à déterminer les représentations de l'algèbre du groupe $\mathbb{C}[W]$.

3.4.1 Représentations irréductibles de $\mathbb{C}[W]$

On a tout d'abord deux représentations de $\mathbb{C}[W]$, toutes les deux de dimension 1. Elles sont donc irréductibles :

– La représentation triviale :

$$\begin{array}{rccc} 1_W : & W & \to & \mathbb{C}^* \\ & s,t & \mapsto & 1 \end{array}$$

– La représentation signe :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{sgn} : & W & \to & \mathbb{C}^* \\ & s,t & \mapsto & -1 \end{array}$$

que l'on peut vérifier bien définie (en utilisant la présentation de W par exemple).

On a également une représentation de dimension 2 comme suit :

$$\begin{array}{rccc} \rho : & W & \to & \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \\ & s & \mapsto & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

On vérifie que ceci définit uniquement une représentation de dimension 2 de $\mathbb{C}[W]$. On vérifie facilement que cette représentation est irréductible, ne possédant pas de sous-espaces invariants non triviaux.

D'après le théorème de Maschke, on sait que $\mathbb{C}[W]$ est semi-simple et par celui de Wedderburn, on obtient que

$$\dim\mathbb{C}[W] = 6 = \sum_{V \in \mathrm{Irr}(\mathbb{C}[W])} \dim(V)$$

ce qui implique que l'on a trouvé toutes les représentations irréductibles de $\mathbb{C}[W]$. La table des caractères est donnée par :

	1	t	st
1_W	1	1	1
sgn	1	-1	1
ρ	2	0	-1

Considérons la forme symétrisante canonique définie dans l'exemple 2.2.4 , on a pour tout $w \in W$

$$\tau(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On cherche les degrés relatifs aux modules simples. Il existe d_1, d_2 et d_3 tels que

$$\tau = d_1\chi_{1_W} + d_2\chi_{\mathrm{sgn}} + d_3\chi_\rho$$

on obtient $d_1 = d_2 = 1/6$ et $d_3 = 1/3$.

3.4.2 Représentations irréductibles de H_K

On pose $u_s = u_t = u$ une indéterminée et $v_s = v_t = u - 1$. On considère l'algèbre de Iwahori-Hecke H_K sur la clôture algébrique K de $\mathbb{C}(u)$. Celle-ci est engendrée comme K-algèbre par T_s et T_t.

On a déjà vu que H_K est alors semi-simple (en combinant théorème de déformation de Tits et de Maschke). On a donc une bijection entre les représentations irréductibles de H_K et celles de $\mathbb{C}[W]$. Les trois représentations irréductibles de H_K sont les suivantes :

– la représentation “triviale"

$$\begin{array}{rccc} 1_u : & H_K & \to & K^\times \\ & T_s, T_t & \mapsto & u \end{array}$$

– La représentation “signe” :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{sgn}_u : & H_K & \to & K^\times \\ & T_s, T_t & \mapsto & -1 \end{array}$$

– La représentation de dimension 2

$$\begin{array}{rccc} \rho_u : & H_K & \to & \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \\ & T_s & \mapsto & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ u & u \end{pmatrix} \\ & T_t & \mapsto & \begin{pmatrix} u & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

On vérifie que ces trois représentations sont irréductibles. Notons aussi qu'elles se spécialisent bien en représentations irréductibles de $\mathbb{C}[W]$ lorsque u se spécialise en 1. Si on considère la dorme symétrisante, on remarque cette fois que l'on a :

$$\tau = (1/p)\chi_{1_u} + (u^3/p)\chi_{\mathrm{sgn}_u} + (u(u+1)/p)\chi_{\rho_u}$$

où $p = (u+1)(u^2+u+1)$.

3.4.3 Quelques spécialisations

On garde les même notations que ci-dessus et on considère la spécialisation $\theta : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ telle que $\theta(u) = -1$. On vérifie alors que les représentations "signe" et "triviale" se spécialisent en la même représentation sur $H_{\mathbb{C}}$ qui est en fait irréductible. On trouve que la matrice de décomposition est en fait égale à

	$\mathrm{Irr}(H_{\mathbb{C}})$	
1_u	1	0
ε_u	1	0
ρ_u	0	1

Si $\theta : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ telle que $\theta(u) = \exp(2i\pi/3)$, on peut vérifier que l'on obtient la matrice de décomposition suivante :

	$\mathrm{Irr}(H_{\mathbb{C}})$	
1_u	1	0
ε_u	0	1
ρ_u	1	1

3.5 La conjecture de James

Nous terminons ce cours par une conjecture fondamentale datant de 1990 sur les représentations du groupe symétrique. Celle-ci donne une motivation pour l'étude des représentations d'algèbres de Hecke. Dans cette partie, on suppose que W est le groupe de Coxeter de type A_{n-1}. Soit $\theta : A \to k$ une spécialisation dans un corps k. On note

$$e := \min\{i \geq 1 \mid 1 + \theta(q) + \ldots + \theta(q)^{i-1} = 0\}$$

en supposant qu'un tel nombre existe. Ces données permettent de définir une matrice de décomposition $D_{k,e}$ qui est sensé “contrôlée” la théorie des représentations de l'algèbre spécialisée

Conjecture de James. *Si la caractéristique de k est égale à l et si $el > n$ (ou si $l = 0$) alors la matrice $D_{k,e}$ ne dépend pas de l.*

Voici une conséquence immédiate : si on a $\theta(q) = 1$ et si k est de caractéristique l alors l'algèbre spécialisée est isomorphe à $k\mathfrak{S}_n$. La matrice $D_{k,e}$ contrôle alors dans un certain sens la théorie des représentations de $k\mathfrak{S}_n$. Celle-ci reste encore aujourd'hui très méconnue (contrairement au cas de la caractéristique 0). La conjecture ci-dessus entraînerait alors que $D_{k,e}$ est égale à la matrice de décomposition de $D_{\mathbb{C},e}$ (si $el > n$). Cette dernière matrice contrôle, elle, les représentations de l'algèbre de Hecke $H_{\mathbb{C}}$. Or on dispose d'algorithme explicite pour le calcul de ces matrices (algorithme de LLT, voir [12, Ch. 6]). Si la conjecture de James est vérifiée, on obtiendrait donc, sous l'hypothèse $el > n$, des algorithmes explicites donnant des informations sur les représentations irréductibles de $k\mathfrak{S}_n$.

Un enjeu fondamental consiste donc en la détermination explicite des matrices de décomposition pour les algèbres de Iwahori-Hecke. D'autres questions connexes à celle-ci se posent :

- Peut-on déterminer explicitement les repésentations irréductibles d'algèbres de Hecke ? au moins dans le cas semi-simple ? voir les travaux de Kazhdan et Lusztig [11].
- Peut-on compter et paraméterer les représentations irréductibles dans le cas non semi-simples ? voir les travaux de Geck [8].
- Chaque module simple pour une algèbre de Iwahori-Hecke associé au groupe de Coxeter de type A_n peut naturellement se voir comme un module pour une algèbre de Iwahori-Hecke associé au groupe de Coxeter de type A_{n-1}. Celui-ci se "décompose" (au moins au niveau des caractères) selon les modules simples de cette dernière algèbre. Peut-on explicitement déteminer ces déecompositions ? ceci est lié à la théorie des bases canoniques et cristaux des groupes quantiques (théorème d'Ariki, voir [1] et [12, Ch. 6])
- Peut-on définir des algèbres de Hecke pour d'autres groupes ? en particulier les groupes de réflexions complexes (sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ cette fois ...), voir les travaux d'Ariki [1] et de Broué-Malle [3].
- Et généraliser tous les problèmes précédents pour ces algèbres ?

Bibliographie

[1] S. Ariki, *Representations of quantum algebras and combinatorics of Young tableaux.* University Lecture Series, 26. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[2] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie*, Chap. 4,5,6. Eléments de Mathématiques. Hermann.

[3] M. Broué, G. Malle, *Zyklotomische Heckealgebren. (German) [Cyclotomic Hecke algebras]* . Représentations unipotentes génériques et blocs des groupes réductifs finis. Astérisque No. 212 (1993), 119–189

[4] C. Curtis, I. Reiner, *Methods of Representation Theory vol.1.* Wiley. New York, 1990.

[5] C. Curtis, I. Reiner, *Methods of Representation Theory vol.2.* Wiley. New York, 1990.

[6] C. Curtis, I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras.* Wiley. New York, 1962.

[7] M. Geck, *Groupes de réflections, algèbres de Iwahori-Hecke et cellules de Kazhdan-Lusztig.* Cours de DEA, Lyon I, 2001.

[8] M. Geck, *Modular representations of Hecke algebras.* Group representation theory, 301–353, EPFL Press, Lausanne, 2007.

[9] M. Geck, G.Pfeiffer, *Characters of Finite Coxeter Groups and Iwahori-Hecke Algebras.* Oxford Science Publications. Oxford University Press, 2000.

[10] J. Humphreys *Reflection Groups and Coxeter Groups.* Series : Cambridge Studies in Advanced Mathematics (No. 29)

[11] D. Kazhdan, G. Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras.* Invent. Math. 53 (1979), no. 2, 165–184.

[12] A. Mathas, *Iwahori-Hecke algebras and Schur algebras of the symmetric group.* University lecture series, 15, AMS, 1999.

[13] J. Michel, *Groupes de réflexions complexes.* `http://people.math.jussieu.fr/~jmichel/`