Licence Mathématiques 3ème année

GEOMETRIE 4

Nicolas JACON

Université de Reims

Table des matières

Chapitre 1

Angles

1.1 Rappel sur les espaces affines euclidiens

Définition 1.1.1 Soit $\overrightarrow{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On dit que $\overrightarrow{E}$ est un espace vectoriel euclidien s'il existe une application appelée produit scalaire :

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{E} \times \overrightarrow{E} & \times & \mathbb{R} \\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \mapsto & (\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}) \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \overrightarrow{E}^3,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ (\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}|\overrightarrow{w}) = \lambda(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}) + \mu(\overrightarrow{v}|\overrightarrow{w})$,
2. $\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{E}^2,\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$,
3. $\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E},\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Dans la suite, on note $\|\overrightarrow{u}\|$ pour $\sqrt{(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{u})}$, la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$. On dit que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si on a $(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$. Si $\overrightarrow{V}$ est un sous espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$, on note $(\overrightarrow{V})^\perp$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à ceux de $\overrightarrow{V}$, on vérifie alors que

- $(\overrightarrow{V})^\perp$ est un sous espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$,
- il est supplémentaire à $\overrightarrow{V}$ c'est à dire que l'on a $\overrightarrow{V} \oplus (\overrightarrow{V})^\perp = \overrightarrow{E}$.

Notons que si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs orthogonaux alors

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2$$

Rappelons également les deux résultats fondamentaux suivants concernant la norme de vecteurs :

Proposition 1.1.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. Alors on a*

$$|(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v})| \leq \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|.$$

avec égalité si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\|\overrightarrow{u} - \lambda\overrightarrow{v}\| = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires. Or, on a

$$\|\overrightarrow{u} - \lambda\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v})\lambda + \lambda^2\|v\|^2$$

Ce polynôme en λ étant toujours positif (ou nul), son discriminant est négatif ou nul. Or, ce discriminant est précisemment égal à

$$4(|(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v})|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2)$$

ce qui implique que

$$|(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v})|^2 \leq \|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2$$

soit encore

$$(|(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v})| \leq \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$$

On a de plus égalité si et seulement si le discriminant est nul c'est à dire lorsque le polynôme admet une racine réel. Ceci est équivalent à dire qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda_0\overrightarrow{v}$

□

Cette inégalité permet de démontrer l'inégalité triangulaire ce qui fait de $\|.\|$ une norme au sens topologique.

Proposition 1.1.3 *Pour tout $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans $\overrightarrow{E}$, on a*

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$$

Si $\overrightarrow{u} \neq 0$, l'égalité est vérifiée si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$.

Preuve. On a

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}).$$

Or, d'après Cauchy Schwarz :

$$(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}) \leq |(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v})| \leq \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$$

On obtient donc :

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 \leq \|u\|^2 + \|\|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2.$$

Ceci permet de conclure concernant l'inégalité triangulaire. L'égalité intervient si et seulement si $|(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v})| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$, c'est à dire lorsque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

□

Définition 1.1.4 Soit E un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$. On dit que E est un espace affine euclidien si et seulement si $\overrightarrow{E}$ est euclidien.

Théorème 1.1.5 (Perpendiculaire commune à deux droites) *Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non concourrantes et non parallèles d'un espace affine euclidien E de dimension $n \geq 3$. Alors il existe $M \in \mathcal{D}$ et $M' \in \mathcal{D}'$ telle que la droite (MM') soit l'unique perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. La valeur $\|\overrightarrow{MM'}\|$ est la distance de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{D}'$ c'est à dire*

$$\|\overrightarrow{MM'}\| = \mathrm{Inf}(\|\overrightarrow{NN'}, \|N \in \mathcal{D}, N' \in \mathcal{D}'\}$$

Preuve. Soient $A \in \mathcal{D}$ et $A' \in \mathcal{D}'$, $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}$, $\overrightarrow{u'} \in \overrightarrow{\mathcal{D}'}$ tels que $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{u'}\| = 1$. Alors pour tout $M \in \mathcal{D}$. il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}$. De même, pour tout $M' \in \mathcal{D}'$, il existe $\lambda' \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{A'M'} = \lambda' \overrightarrow{u}$. Remarquons que l'on a alors

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{MM'}|\overrightarrow{u}) &= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M'}|\overrightarrow{u}) \\ &= -\lambda\|\overrightarrow{u}\|^2 + (\overrightarrow{AA'}|\overrightarrow{u}) + \lambda'(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})\end{aligned}$$

Il suit ainsi que $(\overrightarrow{MM'}|\overrightarrow{u}) = 0$ si et seulement si

$$\lambda\|\overrightarrow{u}\|^2 - \lambda'(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}) = (\overrightarrow{AA'}|\overrightarrow{u})$$

et de même, on a $(\overrightarrow{MM'}|\overrightarrow{u'}) = 0$ si et seulement si

$$\lambda'\|\overrightarrow{u'}\|^2 - \lambda(\overrightarrow{u}', \overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{A'A}|\overrightarrow{u'}).$$

Le problème revient donc à prouver l'existence et l'unicité d'un couple $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$ vérifiant le système suivant :

$$\begin{cases} \|u\|^2\lambda - \lambda'(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{u'}) &= (\overrightarrow{AA'}|\overrightarrow{u}) \\ -(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{u'}) + \|\overrightarrow{u'}\|^2\lambda' &= (\overrightarrow{A'A}|\overrightarrow{u'}) \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est égal à

$$(\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{u'}\|)^2 - (\overrightarrow{u}|\overrightarrow{u'})^2$$

D'après Cauchy-Schwarz, ce déterminant est strictement positif puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont non colinéaires. Le système ci-dessus admet donc une unique solution qui définit de façon unique M et M' comme convenu. On a de plus

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A'}$$

et comme $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{M'A'}$ sont orthogonaux, on a :

$$\|\overrightarrow{AA'}\|^2 = \|\overrightarrow{MM'}\|^2 + \|\overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'A'}\|^2 \geq \|\overrightarrow{MM'}\|^2$$

□

Dans la suite, si A et B sont deux points d'un espace affine euclidien, on note AB pour la norme $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Définition 1.1.6 Soit $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n$ une famille de n vecteurs de $\overrightarrow{E}$. On appelle volume dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs $\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n$ le déterminant :

$$V_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n) = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n)$$

Proposition 1.1.7 *Soient $\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n$ une famille de n vecteurs linéairement indépendants de $\overrightarrow{E}$. Soient $\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n$ une autre famille de n vecteurs linéairement indépendants de $\overrightarrow{E}$. Alors le rapport*

$$V_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n)/V_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n)$$

ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie.

Preuve. On considère une autre base $\mathcal{B}'$ de $\overrightarrow{E}$. Soit $P := P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. C'est donc la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ (ie la matrice de l'identité lorsque la base de départ est $\mathcal{B}'$ et la base d'arrivée $\mathcal{B}$.

Si A est la matrice des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_n$ dans la base $\mathcal{B}$, alors $P^{-1}A$ est la matrice des coordonnées de $\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_n$ dans la base $\mathcal{B}'$. On a donc :

$$V_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_n) = \det(P^{-1}) \times V_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_n)$$

et la même formule est valable pour $\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_n$. On conclut donc en simplifiant par $\det(P^{-1})$.

$\square$

Rappellons qu'une base orthonormale d'un espace euclidien $\overrightarrow{E}$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{E}$ c'est à dire une base de $\overrightarrow{E}$ composée de vecteurs unitaires et orthogonaux 2 à 2. On sait que tout espace euclidien admet une base orthonormale (non unique).

{cal}

Proposition 1.1.8 *Sous les mêmes notations, $|V_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_n)|$ est indépendant de la base orthonormale choisie. De plus, si les $\overrightarrow{u}_i$ sont orthogonaux deux à deux, on a :*

$$|V_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_n)| = \|\overrightarrow{u_1}\| \times \dots \times \|\overrightarrow{u_n}\|.$$

Preuve. Si $\mathcal{B}'$ est une autre base orthonormale alors la matrice P de la proposition précédente est une matrice orthogonale, c'est à dire que l'on a $PP^t = I$ donc son déterminant vaut ± 1 ce qui permet de montrer le premier point. Pour le second,on a :

$$\det(\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_n) = \|\overrightarrow{u_1}\| \dots \|\overrightarrow{u_n}\| \det(\overrightarrow{u}_1/\|\overrightarrow{u_1}\|, \dots, \overrightarrow{u}_n/\overrightarrow{u_n}\|)$$

et comme $\overrightarrow{u}_1/\|\overrightarrow{u_1}\|, \dots, \overrightarrow{u}_n/\|\overrightarrow{u_n}\|$ est une base orthonormale, le déterminany vaut ± 1, c'est le déterminant d'une matrice orthogonal. On peut donc conclure.

$\square$

Quelques précisions quant à la preuve. La matrice P ci-dessus est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. Si on écrit $P = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, on a pour tout $1 \le j \le n$

$$e'_j = \sum_{1\le i\le n} a_{ij} e_i$$

en utilisant le produit scalaire, on voit que pour tout $1 \le i, j \le n$, on a

$$a_{ij} = (e'_j | e_i)$$

La matrice P^t est la matrice $((e'_i|e_j))_{1\le i,j\le n} = ((e_j|e'_i))_{1\le i,j\le n}$, c'est donc la matrice $P^{-1} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$. P est donc bien orthogonal pour le déterminant et le volume, étant entendu que la valeur absolue est invariante si on considère des bases orthonorméees.

Par la suite, on omettra souvent l'indice $\mathcal{B}$ quand il n'y a pas d'ambiguité sur le choix de la base.

1.2 Ecart angulaire

Soient A, B et C trois points disctincts deux à deux d'un plan affine euclidien E. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a que :

$$-1 \leq \frac{(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC})}{AB.AC} \leq 1$$

Rappelons que la fonction cosinus est une bijection de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$ et elle admet donc une fonction réciproque de $[-1,1]$ dans $[0,\pi]$ notée arccos. On définit l'écart angulaire entre (AB) et (AC) par :

$$\widehat{BAC} = \arccos\left(\frac{(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC})}{AB.AC}\right)$$

On a les propriétés suivantes :

1. $0 \leq \widehat{BAC} \leq \pi$,
2. $\widehat{BAC} = \widehat{CAB}$, le produit scalaire étant symétrique.
3. $\widehat{BAC} = \pi/2$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
4. $\widehat{BAC} = 0$ ou π si et seulement si A, B et C sont alignés. Ceci provient du fait que $(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}) = AB.AC$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
5. On a
$$(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}) = AB.AC.\cos(\widehat{BAC})$$

{aire}

Lemme 1.2.1 *Soit $\overrightarrow{E}$ un plan vectoriel euclidien et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormale de $\overrightarrow{E}$. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de $\overrightarrow{E}$. Alors si $\theta = \arccos(\frac{(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v})}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|})$ on a :*

$$|V(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\sin(\theta)$$

Preuve. Soient (a,b) et (c,d) les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans la base (e_1, e_2). On a alors

$$(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}) = ac + bd$$

et

$$\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = ad - bc$$

et par définition :

$$\cos(\theta) = \frac{ac+bd}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} 1 - \cos^2(\theta) &= \frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\ &= \frac{(ad-bc)^2}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure, le sinus de $\theta \in [0,\pi]$ étant positif.

□

Définition 1.2.2 Soient A, B et C trois points d'un plan affine euclidien. ALors on a :

$$V(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = V(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = V(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$$

Ceci ne dépendant pas de la base orthonormale choisie. On pose

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}|V(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$$

l'aire du triangle ABC, il ne dépend pas de la base orthonormale choisie.

On vérifie par exemple

$$\begin{aligned}
\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) &= \det(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) \\
&= \det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA}) + \det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) \\
&= -\det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) \\
&= \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})
\end{aligned}$$

{p}

Théorème 1.2.3 *Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan affine eucilidien. On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\widehat{A} = \widehat{BAC}$, $\widehat{B} = \widehat{CBA}$, $\widehat{C} = \widehat{ACB}$ et $\mathcal{S}$ l'aire du triangle ABC. Alors on a :*

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$,
2. $sin(\widehat{A}) = \dfrac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ *où* $p = \dfrac{a+b+c}{2}$
3. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
4. $S = \dfrac{1}{2}bc\sin(\widehat{A})$,
5. $\dfrac{a}{\sin(\widehat{A})} = \dfrac{b}{\sin(\widehat{B})} = \dfrac{c}{\sin(\widehat{C})} = \dfrac{abc}{2S}$
6. *On a au plus un seul écart angulaire supérieur ou égal à* $\pi/2$.
7. $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
a^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 &= \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 \\
&= \|\overrightarrow{BA}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 + 2(\overrightarrow{BA}|\overrightarrow{AC})
\end{aligned}$$

Or, on a $(\overrightarrow{BA}|\overrightarrow{AC}) = -(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}) = -bc\cos(\widehat{A})$ d'où le premier point.

Pour le second point, on a $\cos(\widehat{A}) = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ d'après 1. Alors :

$$\begin{aligned}
1 - \cos^2(\widehat{A}) &= \frac{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2} \\
&= \frac{(2bc - b^2 - c^2 + a^2)(2bc + b^2 + c^2 - a^2)}{4b^2c^2} \\
&= \frac{(a^2 - (b-c)^2)((b+c)^2 - a^2)}{4b^2c^2} \\
&= \frac{(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{4b^2c^2} \\
&= \frac{2(p-b)2(p-c)2(p-a)2p}{4b^2c^2} \\
&= \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}
\end{aligned}$$

Donc $\sin(\widehat{A}) = \dfrac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Les points 3 et 4 sont des conséquence des lemmes 1.2.1 et de 2. En combinant 2 et 4, on obtient le point 5.

Pour le point 6, supposons que $\widehat{A} \geq \pi/2$ et $\widehat{B} \geq \pi/2$. Alors, d'après la définition de l'écart angulaire, on a à la fois $(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}) \leq 0$ et $(\overrightarrow{BC}|\overrightarrow{BA}) \leq 0$. Donc on a

$$(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}|\overrightarrow{CB}) \leq 0$$

La norme de $\overrightarrow{AB}$ est nul donc $A = B$ ce qui est exclus.

Enfin, pour le dernier point, on peut supposer que $\widehat{A} \leq \pi/2$ et $\widehat{B} \leq \pi/2$. et donc que

$$0 \leq \widehat{A} + \widehat{B} < \pi$$

On a alors

$$\cos(\widehat{A} + \widehat{B}) = \cos\widehat{A}\cos\widehat{B} - \sin\widehat{A}\sin\widehat{B}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned}\cos\widehat{A}\cos\widehat{B} &= \frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}{4abc^2} \\ &= \frac{c^4-(a^2-b^2)^2}{4abc^2} \\ &= \frac{c^4-a^4-b^4+2a^2b^2}{4abc^2}\end{aligned}$$

et

$$\sin\widehat{A}\sin\widehat{B} = \frac{4}{abc^2}p(p-a)(p-b)(p-c)$$

et en tenant compte des calculs faits en 2, on obtient :

$$\begin{aligned}\sin\widehat{A}\sin\widehat{B} &= \frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4abc^2} \\ &= \frac{4b^2c^2-b^4-c^4-a^4-2b^2c^2+2a^2b^2+2a^2c^2}{4abc^2}\end{aligned}$$

Donc

$$\cos(\widehat{A} + \widehat{B}) = \frac{2c^4-2a^2c^2-2b^2c^2}{4abc^2} = \frac{c^2-a^2-b^2}{2ab} = \cos(\pi - \widehat{C}$$

Puisque $\widehat{A} + \widehat{B}$ et $\pi - \widehat{C}$ sont dans $[0,\pi]$ on peut conclure.

□

1.3 Rotations et orientations

Nous allons maintenant chercher à définir une mesure plus précise que l'écart angulaire de deux vecteurs en associant à deux vecteurs un élément de $[-\pi,\pi]$ qui "généralise" (dans un sens à préciser) l'écart angulaire. L'idée essentielle est d'utiliser certains types d'automorphismes d'espace vectoriels : les rotations. Le but va être d'associer à ces rotations un élément de $[-\pi,\pi]$ qui sera la mesure voulue. La première difficulté est que cette notion dépendra du choix de bases.

Considérons un espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ de dimension n et l'ensemble $\mathfrak{B}$ de toutes les bases de $\overrightarrow{E}$. Prenons 2 bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ quelconques de $\mathfrak{B}$. Alors la matrice des coordonnées de $\mathcal{B}_1$ dans $\mathcal{B}_2$ est de déterminant non nul. C'est simplement la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1}$. On écrit alors

$$\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$$

si et seulement si le déterminant de cette matrice est strictement positif. Vérifions que nous avons là une relation d'équivalence :

- la réflexivité est clair car $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}} = \mathrm{Id}$,
- la symétrie vient du fait que le déterminant de $P_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1}$ est de même signe que celui de $P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$, qui est son inverse.
- la transitivité vient des formules de changements de base :

$$P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_3} = P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} P_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_3}$$

  et donc si les déterminants de $P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ et $P_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_3}$ sont positifs, il en est de même pour $P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_3}$.

Fixons une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Alors $\mathcal{B}' = (e_2, e_1, \dots, e_n)$ est une autre base de $\overrightarrow{E}$ et le déterminant de $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ est négatif. Elles sont donc dans deux classes d'équivalences différentes. Maintenant tout autre base $\mathcal{B}''$ appartient soit à la classe de $\mathcal{B}$ (si le déterminant de $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}''}$ est positif) soit à la classe de $\mathcal{B}'$ (si le déterminant de $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}''}$ est négatif car alors le déterminant de $P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}''}$ est positif). On a donc deux classes d'équivalence.

Définition 1.3.1 On dit que l'on choisit une orientation de $\overrightarrow{E}$ lorsqu'on choisit une des deux classes d'équivalence. Les bases de cette classes sont alors dites directes, les bases de l'autre classe sont dites indirectes

Exemple 1.3.2 Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire classique, on peut considérer la base canonique (e_1, e_2), alors la base (e_2, e_1) est dans une classe d'équivalence différentes. On a donc deux orientations possibles selon que l'on choisit la première base qui sera alors directe, ou la seconde.

Passons maintenant à la définition des rotations dans le plan vectoriel.

Définition 1.3.3 Soit $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel euclidien de dimension n. On dit qu'un automorphisme $\overrightarrow{\sigma}$ de $\overrightarrow{E}$ est une isométrie vectorielle si :

$$(\overrightarrow{\sigma}(\overrightarrow{u})|\overrightarrow{\sigma}(\overrightarrow{v})) = (\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v})$$

pour tout $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans $\overrightarrow{E}$.

Comment reconnaître matriciellement une isométrie ? donnons nous une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ et écrivons la matrice d'une isométie vectorielle $\overrightarrow{\sigma}$. Notons la $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$. On a alors pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$:

$$a_{i,j} = (\sigma(e_j)|e_i)$$

La transposée de A est donnée par $A^t = (a_{j,i})_{1 \le i,j \le n}$ donc le coefficient de la

$i$ème ligne et $j$ième colonne de la matrice $A^t.A$ est égale à :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq k\leq n} a_{k,i}a_{k,j} &= \sum_{1\leq k\leq n} (\sigma(e_i)|e_k)(\sigma(e_j)|e_k)\\ &= \sum_{1\leq k\leq n} (\sigma(e_i)|e_k)(\sigma(e_j)|e_k)\\ &= \sum_{1\leq k\leq n} \big(\sigma(e_j)|(\sigma(e_i)|e_k)e_k\big)\\ &= \big(\sigma(e_i)|\sum_{1\leq k\leq n} (\sigma(e_i)|e_k)e_k\big)\\ &= \big(\sigma(e_i)|\sigma(e_j)\big)\end{aligned}$$

et donc la matrice $A^t.A$ est égal à l'identité. On voit en fait simplement que cette relation implique que l'image d'une base orthonormale est encore orthonormale. On dit que A est orthogonal, une telle matrice est inversible d'inverse sa transposée et il revient au même de dire $A.A^t = I$. Réciproquement, on montre facilement que si A est orthogonal alors σ est une isométrie vectorielle. On a donc :

Proposition 1.3.4 *Soit σ automorphisme de $\vec{E}$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormale. ALors σ est une isométrie vectorielle si et seulement si la matrice de cet automorphisme dans $\mathcal{B}$ est orthogonal.*

Une isométrie vectorielle préserve ainsi la norme d'un vecteur. L'ensemble $\mathrm{Is}(\overrightarrow{E})$ des isométries vectorielles de $\overrightarrow{E}$ est un groupe pour la loi de composition d'applications. De plus, pour tout $\overrightarrow{\sigma} \in \mathrm{Is}(\overrightarrow{E})$, on a $\det(\overrightarrow{\sigma}) = \pm 1$. En effet, si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base orthonormale alors

$$|\det(\overrightarrow{\sigma})| = \|\overrightarrow{\sigma}(e_1)\| \ldots \|\overrightarrow{\sigma}(e_n)\| = 1$$

d'après la proposition 1.1.8. On note de plus

$$SO(\overrightarrow{E}) := \{\overrightarrow{\sigma} \in \mathrm{Is}(\overrightarrow{E}) \mid \det(\overrightarrow{\sigma}) = 1\}$$

et c'est un sous-groupe normal de $\mathrm{Is}(\overrightarrow{E})$ car noyau de l'application déterminant de $\mathrm{Is}(\overrightarrow{E})$ dans $\{\pm 1\}$.

Notons que si $\overrightarrow{f}$ une isométrie et si λ est une valeur propre réel de $\overrightarrow{f}$ alors il existe un vecteur propre $\overrightarrow{u}$ tel que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$ et l'invariance du produit scalaire implique que $\lambda = \pm 1$.

On se place maintenant dans le cas $n = 2$, étudions le groupe $SO(\overrightarrow{E})$ de manière plus précise. Il est appelé le groupe des rotations de $\overrightarrow{E}$. Soit (e_1, e_2) une base orthonormale de $\overrightarrow{E}$. La matrice de $\overrightarrow{\sigma}$ dans cette base est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

et puisque c'est une rotation, on doit avoir $a^2+b^2 = 1$, $c^2+d^2 = 1$ et $ac+bd = 0$ et donc :

$$A = \begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix}$$

avec $a^2 + b^2 = 1$ et $\varepsilon = \pm 1$. En calculant le déterminant qui doit valoir 1, on obtient $\varepsilon = 1$.

Réciproquement, la donnée d'une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

dans la base $\mathcal{B}$ avec $a^2+b^2 = 1$ définit uniquement un automorphisme de $\overrightarrow{E}$. De plus, on a $\|\overrightarrow{\sigma}(e_1)\|^2 = \|e_1\|^2 = 1$ et $\|\overrightarrow{\sigma}(e_2)\|^2 = \|e_2\|^2 = 1$. Ceci implique par suite que c'est une isométrie vectorielle de déterminant 1 donc une rotation. Soit $\mathbb{U}$ le groupe des nombres complexes de module 1. Considérons l'application :

$$SO(\overrightarrow{E}) \to \mathbb{U}$$

qui à la matrice A associe $a + ib$. C'est donc une bijection, on vérifie par simple calcul que c'est un morphisme de groupes et donc un isomorphisme. Comme $\mathbb{U}$ est un groupe abélien, $SO(\overrightarrow{E})$ l'est également.

Proposition 1.3.5 *Pour $n = 2$, le groupe des rotations $SO(\overrightarrow{E})$ est abélien et isomorphe à $\mathbb{U}$. Tout élément de $SO(\overrightarrow{E})$ a une matrice de la forme suivante dans une base orthonormée :*

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

avec $a^2 + b^2 = 1$.

Comment se comporte ces matrices de rotations suivant des choix de bases orthonormales différentes ? soit donc $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases orthonormales de $\overrightarrow{E}$. La matrice de passage $P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ est de la forme suivante :

$$P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

avec $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$. Sa matrice inverse est sa transposée car c'est une matrice orthogonale :

$$P_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

et donc $a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0$. de plus le déterminant vaut ± 1. Par simple calcul, si la matrice de $\overrightarrow{\sigma}$ s'´crit

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

dans la base $\mathcal{B}_1$, on voit alors que

$$\begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ \varepsilon b & a \end{pmatrix}$$

où ε est le déterminant de la matrice de passage. On conclut ainsi :

Proposition 1.3.6 *Soit $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel de dimension 2. On se fixe une orientation de $\overrightarrow{E}$. Soit $\overrightarrow{\sigma}$ une rotation de $\overrightarrow{E}$ de matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

dans une base $\mathcal{B}$ directe. Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de $\overrightarrow{E}$. Alors la matrice de $\overrightarrow{\sigma}$ dans $\mathcal{B}'$ est

- *soit égale à A si $\mathcal{B}'$ est directe.*
- *soit égale à A^t si la base $\mathcal{B}'$ est indirecte.*

La matrice d'une rotation n'est donc pas un invariant selon le choix de bases orthonormales pris pour écrire cette matrice, mais la forme de celle-ci reste assez stable ...

1.4 Angle orienté de vecteurs

Intuitivement, pour définir notre notion d'angle, nous devons garder en tête que l'angle entre deux vecteurs unitaires doit être invariant lorsque l'on applique une rotation aux vecteurs. Notons que par définition, ceci est déjà vrai pour la notion d'écart angulaire.

{unique}

Lemme 1.4.1 *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs unitaires de $\overrightarrow{E}$. Alors il existe une unique rotation $\overrightarrow{\sigma}$ telle que $\overrightarrow{\sigma}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$.*

Preuve. Soit (x, y) et (x', y') les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans une base orthonormale. On veut prouver l'existence d'une rotation $\overrightarrow{\sigma}$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

dans la base choisie. La question revient à se demander si il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} ax + by & = & x' \\ -bx + ay & = & y' \end{cases}$$

On a là un système d'équations à deux inconnues a et b. On sait qu'il admet une unique solution si le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & -x \end{pmatrix}$$

est non nul ce qui est le cas car le vecteur $\overrightarrow{u}$ est unitaire. De plus, on a

$$x'^2 + y'^2 = 1 = a^2 + b^2$$

A est donc bien la matrice d'une rotation.

□

Soit U l'ensemble des vecteurs unitaires de $\overrightarrow{E}$. On définit une relation d'équivalence sur $U \times U$ de la manière suivante. On considère $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}) \in U \times U$ et on écrit

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \sim (\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})$$

si il existe $\overrightarrow{\sigma} \in SO(\overrightarrow{E})$ telle que $\overrightarrow{\sigma}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{\sigma}(\overrightarrow{u'}) = \overrightarrow{v'}$. Alors cette relation est une relation d'équivalence :

– elle est réflexive, car $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \sim (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in U \times U$.
– elle est symétrique car si $\overrightarrow{\sigma}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{\sigma}(\overrightarrow{u'}) = \overrightarrow{v'}$. alors $\overrightarrow{\sigma}^{-1}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{\sigma}^{-1}(\overrightarrow{v'}) = \overrightarrow{u'}$.
– elle est aussi transitive : si il existe $\overrightarrow{\sigma} \in SO(\overrightarrow{E})$ telle que $\overrightarrow{\sigma}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{\sigma}(\overrightarrow{u'}) = \overrightarrow{v'}$ et si il existe $\overrightarrow{\sigma}' \in SO(\overrightarrow{E})$ telle que $\overrightarrow{\sigma}'(\overrightarrow{u'}) = \overrightarrow{v'}$ et $\overrightarrow{\sigma}'(\overrightarrow{u''}) = \overrightarrow{v''}$ alors d'après le lemme 1.4.1, on a $\overrightarrow{\sigma} = \overrightarrow{\sigma}'$ et donc $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \sim (\overrightarrow{u''}, \overrightarrow{v''})$

On voit alors que notre notion d'angle doit être constant sur chaque classe d'équivalence suivant cette définition. A chaque élément de l'ensemble quotient $U \times U/\sim$ correspond une rotation $\overrightarrow{\sigma} \in SO(\overrightarrow{E})$. Celle-ci est uniquement défini d'après nos remarques ci-dessus. On a donc une application :

$$\Psi : U \times U/\sim \to SO(\overrightarrow{E})$$

Si $\overrightarrow{\sigma} \in SO(\overrightarrow{E})$, choisissant $\overrightarrow{u} \in U$ et le vecteur $\overrightarrow{v} := \overrightarrow{\sigma}(\overrightarrow{u})$, on associe un élément de $U \times U/\sim$, Ψ est donc surjective. Elle est même bijective car si deux classes d'équivalence s'envoie sur la même rotation, ceci signifie que ces classes sont les mêmes par définition.

On a donc une bijection :

$$U \times U/\sim \to SO(\overrightarrow{E})$$

Maintenant, $SO(\overrightarrow{E})$ est muni d'une structure de groupes pour la composition d'application. On peut donc définir une structure de groupe sur $U \times U/\sim$ en transportant cette structure.

Définition 1.4.2 L'ensemble quotient $U \times U/\sim$ est appelé l'ensemble des angles orientés de $\overrightarrow{E}$. Cet ensemble est en bijection avec $SO(\overrightarrow{E})$. On peut donc le munir d'une structure de groupe abélien qu'on note additivement. Si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in U \times U$, on note $A(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ la classe d'équivalence de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ modulo $\sim$.

Concrètement, si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in U \times U$ et $(\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}') \in U \times U$ alors il existe $(\overrightarrow{\sigma}, \overrightarrow{\sigma}') \in SO(\overrightarrow{E})$ tel que $\overrightarrow{\sigma}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{\sigma}'(\overrightarrow{u'}) = \overrightarrow{v'}$. Pour tout $\overrightarrow{w} \in U$, on aura :

$$A(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\sigma} \circ \overrightarrow{\sigma'} \overrightarrow{u}) = A(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + A(\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}')$$

Notons que jusqu'à présent, toutes ces notions sont indépendantes du choix de base pour $\overrightarrow{E}$.

Proposition 1.4.3 *Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w} \in U$. Alors on a*

$$A(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = A(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + A(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$$

Preuve. Soient $\overrightarrow{\sigma}$ et τ dans $SO(\overrightarrow{E})$ telles que $\overrightarrow{\sigma}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ et $\tau(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}$ alors on a $(\tau \circ \overrightarrow{\sigma})(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{w}$ et on conclut avec la définition de l'addition.

□

On aimerait maintenant définir une notion de mesure d'angle qui généralise l'écart angulaire. Cette notion dépendra du choix de base. Le travail a déjà été plus ou moins fait : à deux vecteurs, on peut associer une unique rotation qui a la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

avec $a^2 + b^2 = 1$, la mesure voulu sera donc l'ément $\theta \in [-\pi, \pi]$ tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$. Avec la définition suivante, on peut calculer l'angle directement à partir des deux vecteurs. Et on vérifie ensuite que ceci coïncide avec la définition voulu.

Définition 1.4.4 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormale de $\overrightarrow{E}$. On définit l'isomorphisme de $\overrightarrow{E}$ dans $\mathbb{C}$ suivant :

$$\Phi : \overrightarrow{E} \to \mathbb{C}$$

tel que $\Phi(e_1) = 1$ et $\Phi(e_2) = i$. Pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in U \times U$, on définit

$$(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \arg(\frac{\Phi(\overrightarrow{v})}{\Phi(\overrightarrow{u})}) \in [-\pi, \pi]$$

Notons que si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire de coordonnées (a, b) dans la base $\mathcal{B}$ alors $\Phi(\overrightarrow{u}) = a + ib$ est de module 1. Donc le complexe $\dfrac{\Phi(\overrightarrow{v})}{\Phi(\overrightarrow{u})}$ ci-dessus est entièrement déterminé par son argument.

Supposons que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \sim (\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})$, Il existe alors une rotation $\overrightarrow{\sigma}$ telle que $\overrightarrow{\sigma}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{\sigma}(\overrightarrow{u'}) = \overrightarrow{v'}$. Cette rotation a pour matrice dans la base $\mathcal{B}$

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Supposons que $\overrightarrow{u}$ ait pour coordonnées (x, y) dans la base $\mathcal{B}$. ALors $\Phi(\overrightarrow{u}) = x + iy$. $\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(ax - by, bx + ay)$ dans cette même base. Alors on a

$$\frac{\Phi(\overrightarrow{v})}{\Phi(\overrightarrow{u})} = a + ib$$

et le calcul est identique pour $(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})$. Donc $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}})$ et donc $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ est indépendant du choix d'un élément dans la classe d'équivalence. Ceci définit donc une application de $U \times U/\sim$ dans $\mathbb{R}$. Le nombre $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ est appelée la mesure de l'angle orienté $A(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ dans $\mathcal{B}$.

Remarque 1.4.5 On voit ainsi que la mesure de l'angle orienté $A(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est l'angle θ tel que, si la matrice de la rotation associée est

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

on a $\cos(\theta) = a$ et $\sin(\theta) = b$.

Attention, la notion de mesure de l'angle orienté dépend maintenant réellement de la base orthonormale choisie ! cependant, deux cas vont se produire :

– Si on si fixe une orientation et une base orthonormale directe alors la mesure de l'angle orienté est toujours la même, égale à disons θ
– Si maintenant, on choisit une base indirect, la matrice de la rotation associé devient :
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$
et la mesure de l'angle orienté devient $-\theta$.

Proposition 1.4.6 *Pour tout $\overrightarrow{u} \in U$, on a*

$$(\widehat{\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{u}}) \equiv \pi (mod\ 2\pi)$$

et ce résultat est indépendant de la base $\mathcal{B}$ choisi.

Preuve. Ceci provient du faut que $\Phi(-\overrightarrow{u}) = -\Phi(\overrightarrow{u})$.

□

Définition 1.4.7 Soient A, B et C trois points d'un plan affine euclidien E. On les suppose distincts deux à deux. On définit alors

$$A(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) := A(\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}, \frac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|})$$

{abs}

Proposition 1.4.8 *Soient A, B et C trois points distincts d'un plan affine euclidien E. Alors on a :*

$$|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \widehat{BAC}$$

Preuve. On se donne une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $\overrightarrow{E}$. Soit (a, b) les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ dans cette base et (c, d) celle de $\overrightarrow{AC}$. On sait alors que

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{ac + bd}{\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}}$$

D'autre part, on a

$$\Phi(\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|)} = \frac{a + ib}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \Phi(\frac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|)} = \frac{c + id}{\sqrt{c^2 + d^2}}$$

d'où

$$\Phi(\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|)} / \Phi(\frac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|)} = \frac{(c + id)}{a + ib} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}}$$

soit encore

$$\Phi(\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|)} / \Phi(\frac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|)} = \frac{(c + id)(a - ib)}{\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}}$$

le cosinus de $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ est donc égal à la partie réel de ce nombre qui est l'élément voulu.

□

On retient donc ici que :

1. L'angle orienté de deux vecteurs se définit comme l'angle associé à l'unique rotation envoyant un vecteur sur l'autre.
2. La mesure de cet angle dépend de l'orientation du repère choisi,
3. La mesure de l'angle est défini modulo 2π et sa valeur absolue est l'´cart angulaire.

Remarque 1.4.9 Ces notions permettent de définir le produit vectoriel de deux vecteurs dans un espace vectoriel euclidien de dimension 3. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de $\overrightarrow{E}$ alors $u \wedge v$ est nul si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et sinon l'unique vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, de longueur $\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\||\sin(\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})})|$ (ne dépend pas de l'orientation choisie) et tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ soit directe. Dans une base orthonormée directe, les coordonnées s'expriment par les formules suivantes :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}$$

1.5 Propriétés des angles orientés

Le but de cette partie est essentiellement de donner quelques propriétés essentielles des angles orientés.

{app}

Proposition 1.5.1 *Soient A, B et C trois points disctincts d'un plan affine euclidien. Alors, on peut choisir une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ telle que les mesures des angles orientées $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$, $\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})}$ appartiennent à $[0, \pi]$.*

Preuve. On pose $e_1 = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$. On choisit alors e_2 orthogonal à e_1 et unitaire. Quitte à remplacer e_2 par $-e_2$, on peut supposer que $(e_2|\overrightarrow{AC}) = k \geq 0$.

Montrons que la base orthonormale (e_1, e_2) satisfait l'énoncé de la proposition. Pour ceci, il suffit de montrer que les parties imaginaires de

$$\frac{\Phi(\overrightarrow{AC})}{\Phi(\overrightarrow{AB})}, \ \frac{\Phi(\overrightarrow{CB})}{\Phi(\overrightarrow{CA})}, \ \frac{\Phi(\overrightarrow{BC})}{\Phi(\overrightarrow{BA})}$$

sont positives ou nulles. Posons $c = AB$. On a alors

$$\overrightarrow{AB} = ce_1, \ \overrightarrow{AC} = \lambda e_1 + ke_2, \ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (\lambda - c)e_1 + ke_2$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, et un simple calcul nous montre le résultat voulu.

$\square$

{media}

Lemme 1.5.2 *Soient B et C deux points distincts. Soit A un point de la médiatrice de B et C différent du milieu I de B et C. Alors on a les égalités suivantes :*

$$\widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})} = \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} \ \text{et} \ \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI})} = \widehat{(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC})}$$

Preuve. Posons $c = AB$ et $b = AC$. On a alors $b = c$. D'après la proposition précédente, on peut choisir une base orthonormale de façon à ce que

$$(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = \widehat{B}$$

et

$$(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = \widehat{C}$$

On a

$$\cos \widehat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a}{2c}$$

et

$$\cos \widehat{C} = \frac{a^2 + c^2 - c^2}{2ac} = \frac{a}{2b}$$

donc $\cos \widehat{B} = \cos \widehat{C}$ donc $\widehat{B} = \widehat{C}$ et $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$. Maintenant, si on change de base orthonormale, les mesures sont soit conservées soit changé en leurs opposés. Dans tous les cas, l'égalité reste vrai.

il existe une base orthonormale telle que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}})$, $(\widehat{\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BA}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{IB}})$ soit positif. Pour ce même choix de base, on a donc $(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{AC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BA}})$ positif. Donc $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC}})$ ont le même signe.

$$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}}) = \widehat{IAB} \qquad (\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC}}) = \widehat{IAC}$$

Le calcul des cosinus suffit alors pour conclure.

□

{pla}

Proposition 1.5.3 *Soit A, B et C trois points d'un plan affine euclidien. Alors*

$$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) + (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) + (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = \pi \pmod{2\pi}$$

Preuve. D'après le théorème 1.2.3 (point 7), on obtient :

$$\widehat{ACB} + \widehat{CAB} + \widehat{BCA} = \pi$$

D'après la proposition 1.5.1, on peut choisir une base orthonormé tel que les angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$, $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$, et $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$ soit dans $[0, \pi]$. Dans ce cas, les écarts angulaires correspondent aux angles orientés par la proposition 1.4.8, ceci permet de conclure pour ce choix particuliers de base et le résultat reste le même si on choisit une base orthonormée de même orientation.

Dans le cas où on choisit une base orthonormée d'orientation inverse, les mesures d'angles sont égaux aux opposés des écarts angulaires ce qui permet de conclure.

□

1.6 Cercles et angles

Dans un plan affine euclidien, donnons nous Γ un cercle de centre O. Soit B un point de Γ. On considère l'unique droite perpendiculaire $\mathcal{D}$ à OB passant par B. Pour tout point M de $\mathcal{D}$, on a alors

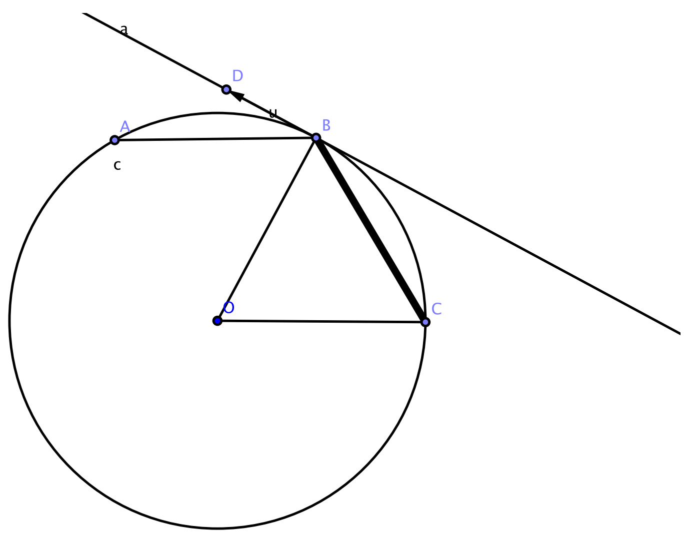
$$OM^2 = OB^2 + BM^2 > OB^2$$

donc M ne peut être sur Γ. Réciproquement, si $\mathcal{D}$ est une droite telle que B est l'unique point d'intersection de Γ avec $\mathcal{D}$. Soit H l'intersection de $\mathcal{D}$ avec la droite orthogonale à $\mathcal{D}$ passant par O. Soit B' le point défini par $\overrightarrow{HB'} = \overrightarrow{BH}$. Alors on a :

$$OB'^2 = OH^2 + HB'^2 = OH^2 + BH^2 = OB^2$$

Donc B' appartient aussi à Γ donc $B = B' = H$ et $\mathcal{D}$ est orthogonal à (OB)

Définition 1.6.1 La droite $\mathcal{D}$ définie ci-dessus est la tangente de Γ en B, c'est donc l'unique droite orthogonale à (OB) passant par B et l'unique droite ayant comme seul point d'intersection B avec Γ



Théorème 1.6.2 (Théorème de l'arc capable) *Soit Γ un cercle de centre O, A, B et C trois points distincts de Γ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de la tangente T à Γ en B. Alors, on a les égaliés suivantes :*

1. $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$,
2. $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BC}}) = \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}) (\mathrm{mod}\, \pi)$

Preuve.

1. On utilise la proposition 1.5.3 dans les triangles AOB et AOC. On utilise le lemme 1.5.2, O étant sur la médiatrice de AB et on obtient l'égalité
$$(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}}) = \pi + 2(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}})(\text{mod } 2\pi)$$
et de même
$$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}) = \pi + 2(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AC}})(\text{mod } 2\pi)$$
On en déduit que
$$(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}) = 2((\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}}) + (\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AC}})) = 2(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$$
2. On a :
$$(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{BC}}) = (\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{BO}}) + (\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BC}})$$
et de plus
$$(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{BO}}) = \pm\pi/2$$
car $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{BO}$ sont orthogonaux. Comme dans le premier point, on peut montrer l'égalité
$$(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}) = \pi + 2(\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BC}})(\text{mod } 2\pi)$$
On en déduit
$$(\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BC}}) = \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}) - \pi/2(\text{mod } \pi)$$
On trouve alors l'égalité recherchée.

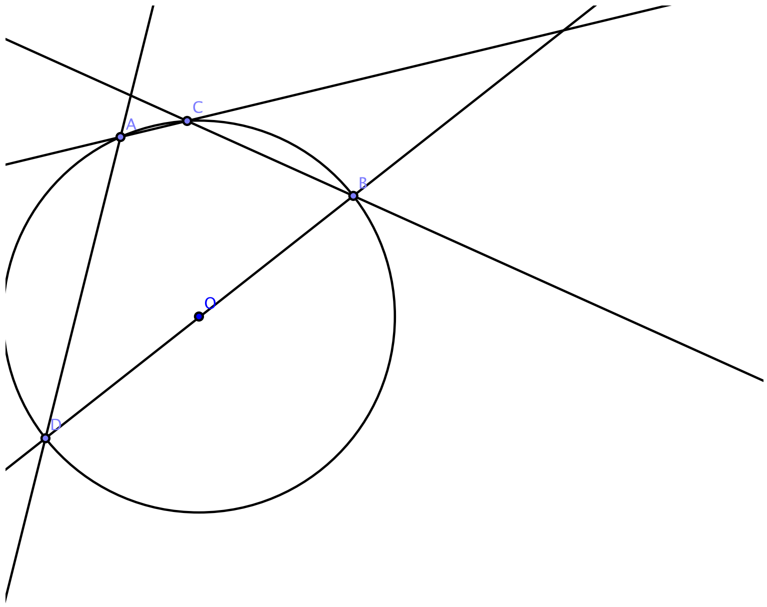
□

1.7 Angle orienté de droites

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites, $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{u'}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$. Si $\overrightarrow{u}''$ est un autre vecteur directeur de $\mathcal{D}'$, alors $(\widehat{\overrightarrow{u'},-\overrightarrow{u'}})$ est égal à 0 ou π. Ainsi $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{u''}}) = (\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{u'}})(\text{mod } \pi)$.

Définition 1.7.1 Sous les hypothèsse ci-dessus, on pose a
$$(\widehat{\mathcal{D},\mathcal{D}'}) := (\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{u'}})$$
ce nombre est donc défini modulo π. C'est la mesure de l'angle entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

De la relation de Chasles pour les angles orientés, on en tire la relation de Chasles pour les angles orientés de droites à savoir :
$$(\widehat{\mathcal{D},\mathcal{D}'}) + (\widehat{\mathcal{D}',\mathcal{D}''}) = (\widehat{\mathcal{D},\mathcal{D}''})$$
si $\mathcal{D}''$ est une droite. De plus, quatre points A, B, C et D sont alignés si et seulement si $(\widehat{(AB),(CD)})$ est égal à 0 (modulo π donc)



Proposition 1.7.2 *Soient A, B et C trois points non alignés. Un point D est sur le cercle* Γ *que les points A, B et C déterminent si et seulement si on a :*

$$(\widehat{(CA),(CB)}) = (\widehat{(DA),(DB)})$$

Preuve. On suppose que D est sur le cercle circonscrit au triangle ABC. D'après le théorème de l'arc capable, on a :

$$2(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})$$

En divisant par 2, modulo π, on obtient donc :

$$(\widehat{(CA),(CB)}) = (\widehat{(DA),(DB)})$$

Réciproquement, si cette égalité est vérifiée, soit O le cercle circonscrit au triangle ABC. Les points D, A et B ne sont pas alignés à cause de l'égalité de l'hypothèse. Soit alors O' le centre du cercle circonscrit au triangle ABD. Le théorème de l'arc capable couplé avec l'hypothèse montre que la tangente à B aux deux cercles coincide. Les droites (OB) et $(O'B)$ coincident alors comme unique perpendiculaire de T en B.

Mais O et O' sont aussi sur la médiatrice de AB (l'ensemble des points équidistants à A et B). Cette médiatrice Δ et (OB) sont non confondus sinon $A = B$. On a donc $O = (OB) \cap \Delta$. Mais on a aussi $O = (OB') \cap \Delta$. Donc $O = O'$ ce qui permet de conclure.

□

On en déduit de facçon directe :

Corollaire 1.7.3 *Soient A, B, C et D quatre points distincts. Alors* $(\widehat{(CA),(CB)})$ *et* $(\widehat{(DA),(DB)})$ *sont égaux (modulo* π*) si et seulement si A, B, C et D sont cocycliques ou alignés.*

□

Chapitre 2

Isométries affines

Le but de ce chapitre est de définir la notion d'isométrie dans un espace affine. Nous donnons ensuite une classification explicite dans le cas des dimensions 2 et 3.

2.1 Généralités

Rappelons la définition de quelques applications affines classiques :
- les translations de vecteurs $\overrightarrow{u}$ sont exactement les applications affines f telles que $\overrightarrow{f} = 1_{\overrightarrow{E}}$. Pour tout $A \in E$, le vecteur $\overrightarrow{Af(A)}$ est constant et égale au vecteur $\overrightarrow{u}$.
- une symétrie s est une application affine admettant au moins un point fixe et tel que $\overrightarrow{s}$ est une symétrie vectorielle
- une rotation σ dans un espace affine de dimension 2 est une application affine admettant un point fixe O et tel que $\overrightarrow{\sigma}$ est une rotation vectorielle. L'angle de la rotation est alors l'angle associée à la rotation vectorielle.

Définition 2.1.1 Soient E un espaces affine euclidien de dimension finie. Soit $f : E \to E$ une application. On dit que f est une isométrie (affine) si pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

$$\|\overrightarrow{f(x)f(y)}\| = \|\overrightarrow{xy}\|$$

Voici le lien avec les isométries vectorielles précédement définies.

Théorème 2.1.2 *Soient E un espace affine euclidien de dimension finie et soit $f : E \to E$ une isométrie. On a alors :*

1. *f est injective donc bijective.*
2. *pour tout $(x, y, z) \in E^3$, on a $(\overrightarrow{f(z)f(x)}|\overrightarrow{f(z)f(y)}) = (\overrightarrow{zx}|\overrightarrow{zy})$.*
3. *f est affine et $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle.*

Preuve.

1. Supposons $f(x) = f(y)$ pour $(x, y) \in E^2$, alors on a $\|\overrightarrow{xy}\| = \|\overrightarrow{f(x)f(y)}\| = 0$ donc $x = y$ et f est injective.

2. On a :

$$(\overrightarrow{f(z)f(x)}|\overrightarrow{f(z)f(y)}) = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{f(z)f(x)}\|^2+\|\overrightarrow{f(z)f(y)}\|^2-\|\overrightarrow{f(z)f(y)}-\overrightarrow{f(z)f(x)}\|^2)$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{array}{rcl} (\overrightarrow{f(z)f(x)}|\overrightarrow{f(z)f(y)}) & = & \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{f(z)f(x)}\|^2 + \|\overrightarrow{f(z)f(y)}\|^2 - \|\overrightarrow{f(x)f(y)}\|^2) \\ & = & \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{zx}\|^2 + \|\overrightarrow{zy}\|^2 - \|\overrightarrow{xy}\|^2) \\ & = & \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{zx}\|^2 + \|\overrightarrow{zy}\|^2 - \|\overrightarrow{zy} - \overrightarrow{zx}\|^2) \\ & = & (\overrightarrow{zx}|\overrightarrow{zy}) \end{array}$$

3. Soient $(x, y, z) \in E^3$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors il existe $t \in E$ tel que

$$\overrightarrow{zt} = \lambda\overrightarrow{zx} + \mu\overrightarrow{zy}$$

On veut montrer que

$$\overrightarrow{f(z)f(t)} = \lambda\overrightarrow{f(z)f(x)} + \mu\overrightarrow{f(z)f(y)}$$

Pour ceci on montre que

$$A := \|\overrightarrow{f(z)f(t)} - \lambda\overrightarrow{f(z)f(x)} - \mu\overrightarrow{f(z)f(y)}\| = 0$$

On développe selon le produit scalaire :

$$\begin{array}{rcl} A & = & \|\overrightarrow{f(z)f(t)}\|^2 + \lambda^2\|\overrightarrow{f(z)f(x)}\|^2 + \mu^2\|\overrightarrow{f(z)f(y)}\|^2 - 2\lambda(\overrightarrow{f(z)f(t)}|\overrightarrow{f(z)f(x)}) \\ & & -2\mu(\overrightarrow{f(z)f(t)}|\overrightarrow{f(z)f(x)}) + 2\lambda\mu(\overrightarrow{f(z)f(x)}|\overrightarrow{f(z)f(y)}) \end{array}$$

Et par 2., on obtient :

$$A = \|\overrightarrow{zt}\|^2 + \lambda^2\|\overrightarrow{zx}\|^2 + \mu^2\|\overrightarrow{zy}\|^2 - 2\lambda(\overrightarrow{zt}|\overrightarrow{zx}) - 2\mu(\overrightarrow{zt}|\overrightarrow{zx}) + 2\lambda\mu(\overrightarrow{zx}|\overrightarrow{zy})$$

donc :

$$A = \|\overrightarrow{zt} - \lambda\overrightarrow{zx} - \mu\overrightarrow{zy}\| = 0$$

ce qui permet de conclure que f est affine. Par 2, $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle.

□

Une isométrie f est une bijection affine. La définition d'isométrie implique en particulier les propriétés suivantes :

1. f conserve le parallélisme car f est affine.
2. f conserve les distance.
3. f transforme tout sous-espace affine en un sous espace affine de même dimension.
4. f conserve les écarts angulaires (car le cosinus d'un écart angulaire se mesure grâce au produit scalaire)
5. On a $\det(\overrightarrow{f}) = \pm 1$. Si le déterminant est 1, f conserve les angles orientés, sinon il change le signe des angles orientés.

Définition 2.1.3 Soit E un espace affine de dimension finie. Alors toute isométrie f telle que $\det(\overrightarrow{f}) = 1$ est appelé un déplacement ou une isométrie positive. Si $\det(\overrightarrow{f}) = -1$, on dit que f est une isométrie négative ou un antidéplacement. On note $\mathrm{Is}(E)$ l'ensemble des isométries de E et $\mathrm{Is}^+(E)$ l'ensemble des isométries positives de E.

Théorème 2.1.4 $\mathrm{Is}(E)$ *est un groupe pour la loi de composition et* $\mathrm{Is}^+(E)$ *un sous-groupe normal de* $\mathrm{Is}(E)$.

Preuve. On vérifie facilement que l'identité est une isométrie, que la composée de deux isométries en est une et que l'inverse d'une isométrie est encore une isométrie. $\mathrm{Is}^+(E)$ est le noyau de l'application de $\mathrm{Is}(E)$ dans $\{\pm 1\}$ qui associe à $f \in \mathrm{Is}(E)$ l'élément $\det(\overrightarrow{f})$ donc un sous-groupe normal de $\mathrm{Is}(E)$.

□

Rappelons qu'une symétrie orthogonal d'un espace affine E (ou plus simplement une réflexion) associée à un hyperplan affine F est l'unique application affine tel que F est l'ensemble des points fixes de celle-ci et telle que l'application linéaire associée est la symétrie orthogonale par rapport à $\overrightarrow{F}$. Le théorème suivant montre que toute isométrie se d´crit à partir d'un certain nombre de symétries.

{dec1}

Théorème 2.1.5 *Soit E un espace affine euclidien de dimension n. Alors toute isométrie de E est le produit d'au plus $n+1$ symétries orthogonales par rapport à des hyperplans de E.*

Preuve. Soit f une isométrie et soit F_0 l'ensemble des points fixes de celle-ci. Supposons $f \neq \mathrm{Id}_E$. Alors il existe $A \in E$ tel que $f(A) \neq A$. On considère $\mathcal{H}$ l'hyperplan médiateur à A et $f(A)$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{H}$. Si $F_0 \neq \emptyset$ et si $B \in F_0$, on a :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{f(A)f(B)}\| = \|\overrightarrow{f(A)B}\|$$

Donc B est dans $\mathcal{H}$ et $F_0 \subset \mathcal{H}$. Soit F_1 l'ensemble des points fixes de $s \circ f$. On a $A \in F_1$ et comme ci-dessus, $F_0 \subset F_1$. Comme $A \notin F_0$, on a $F_0 \neq F_1$. Par conséquent, on peut construire une suite d'isométries

$$f_0 := f, f_1, \ldots, f_i, \ldots,$$

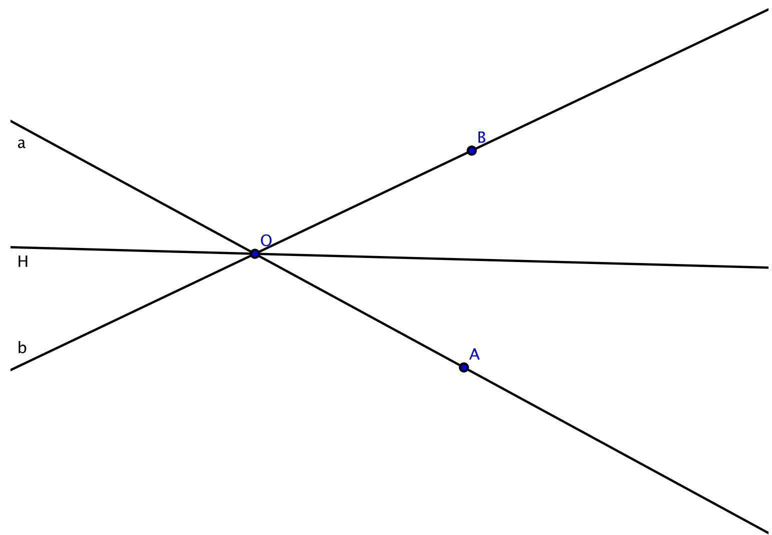
telle que $f_{i+1} = s_i \circ f_i$ où :
- les s_i sont des symétries orthogonales,
- les sous-espaces de points fixes $F_0, \ldots, F_i$ vérifient $\dim(F_1) > 0$ et $\dim(F_{i+1}) > \dim(F_i)$ pour tout $i \geq 1$. Nécessairement, il existe $p \leq n$ tel que $F_{p+1} = E$. Alors, $f_{p+1} = 1_E$ ainsi on a :

$$1_E = s_p \circ \ldots \circ s_1 \circ s_0 \circ f$$

et donc :

$$f = s_0 \circ s_1 \circ \ldots \circ s_p$$

Exemple 2.1.6



Donnons nous une rotation du plan r de centre O où $(0, e_1, e_2)$ est une base orthonormale directe. Nous allons suivre la preuve du résultat ci-dessus. On a $F_0 = \{O\}$. Soit $A \in E$ tel que $A \neq O$. On considère l'hyperplan médiateur à $Ar(A)$ c'est à dire la médiatrice de $[A, r(A)]$ (ie la bissectrice de $(0A)$ et $(Or(A))$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à cet hyperplan. On pose F_1 l'ensemble des points fixes de $s \circ r$. On a $\{O, A\} \subset F_1$ et donc $(OA) \subset F_1$. Comme une rotation autre que l'identié n'est pas une symétrie, on a aussi $F_1 \neq E$ et donc $F_1 = (OA)$.

Maintenant, $\overrightarrow{s \circ r}$ a comme valeur propre 1 associé au vecteur propre $\overrightarrow{OA}$. Comme c'est une isométrie, l'autre valeur propre est -1 et $\overrightarrow{s \circ r}$ est une symétrie vectorielle. Donc $s \circ r$ est la symétrie s' par rapport à (OA).

{sd}

Proposition 2.1.7 *Soient E un un espace affine euclidien de dimension finie et f une isométrie de E. On a*

$$\overrightarrow{E} = \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - 1_{\overrightarrow{E}}) \oplus \mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - 1_{\overrightarrow{E}})$$

Preuve. Ceci suit en fait que les sous-espaces sont orthogonaux $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - 1_{\overrightarrow{E}})$ et $\mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - 1_{\overrightarrow{E}})$. Et effet, si $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - 1_{\overrightarrow{E}})$ et $\overrightarrow{w} \in \mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - 1_{\overrightarrow{E}})$ alors il existe $\overrightarrow{t} \in \overrightarrow{E}$ tel que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{t}) - \overrightarrow{t}$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} (\overrightarrow{v}|\overrightarrow{w}) & = & (\overrightarrow{v}|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{t})) - (\overrightarrow{v}|\overrightarrow{t}) \\ & = & (\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{t})) - (\overrightarrow{v}|\overrightarrow{t}) \\ & = & 0 \end{array}$$

d'où le résultat. L'intersection des deux sous-espaces est donc nul et le résultat suit par le théorème du rang.

$\square$

{sdr}

Remarque 2.1.8 Sous les notations de la proposition, notons que $\mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - 1_{\overrightarrow{E}})$ est un sous-espace stable pour $\overrightarrow{f}$. Il s'ensuit que si il est de dimension 1, il est contenu dans un sous-espace propre de $\overrightarrow{f}$.

{dec2}

Théorème 2.1.9 *Alors il existe une isométrie g ayant un point fixe et un vecteur $\overrightarrow{u}$, tout deux uniques, tels que $\overrightarrow{u}$ est fixe pour $\overrightarrow{g}$ et*

$$f = g \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ g.$$

Preuve.

Soit $A \in E$. On a alors $\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) - \overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - 1_{\overrightarrow{E}})$ et $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$. Soit O le point de E tel que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{v}$. On pose $g = t_{\overrightarrow{u}}^{-1} \circ f$. C'est une isométrie et on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Af(A)} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f(O)f(A)} \\ &= -\overrightarrow{v} + \overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) \end{aligned}$$

On obtient alors $\overrightarrow{Of(O)} = \overrightarrow{u}$ et il suit que $g(O) = O$. g est donc une isométrie admettant un point fixe.

Reste à établir l'unicité du couple $(g, \overrightarrow{u})$. Supposons que $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$ et $f = t_{\overrightarrow{u'}} \circ g'$ et que O et O' soient des points fixes pour g et g', respectivement. Alors on a

$$\overrightarrow{Of(O)} = \overrightarrow{u} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{O'f(O')} = \overrightarrow{u'}$$

Donc on a :

$$\overrightarrow{f(O)f(O')} = \overrightarrow{f(O)O} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'f'(O')} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{u'} - \overrightarrow{u}$$

et il suit $\overrightarrow{u'} - \overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - 1_{\overrightarrow{E}})$. D'autre part $\overrightarrow{u'} - \overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - 1_{\overrightarrow{E}})$ car $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ sont fixes pour $\overrightarrow{f}$.

On obtient par la proposition 2.1.7 :

$$\overrightarrow{u'} - \overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - 1_{\overrightarrow{E}}) \cap \mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - 1_{\overrightarrow{E}})$$

et donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u'}$ et $g = g'$.

Enfin, si $M \in E$ et $M' \in E$ sont tels que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$ alors on a

$$\overrightarrow{g(M)g(M')} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$$

donc

$$t_{\overrightarrow{u}}(g(M)) = g(M') = g(t_{\overrightarrow{u}}(M))$$

2.2 Classification des Isométries du plan et de l'espace

Nous allons maintenant donner des théorèmes de classification.

{pf}

Lemme 2.2.1 *Soit E un espace affine (de dimension quelconque). Soit f une application affine alors si 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$, f admet un unique point fixe.*

Preuve. Soit O dans E, posons $f(O) = O'$. On a $f(M) = M$ si et seulement si $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})$ soit encore $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{O'O} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})$ soit encore $(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'O}$. Si 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$ alors $\overrightarrow{f} - Id$ est inversible donc $\overrightarrow{O'O}$ a un unique antécédant $\overrightarrow{OM}$ d'où l'unicité et l'existence de M.

□

{class0}

Théorème 2.2.2 *On suppose que* $\dim(E) = 2$. *Soit f une isométrie de E. Alors*

1. *Si f est positive, f est une translation ou une rotation.*
2. *Si f est négative, f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite ou bien une symétrie-translation c'est à dire la composée d'une symétrie orthogonale s par rapport à une droite Δ avec une translation de vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\Delta}$. Dans ce dernier cas, on a $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ s = s \circ t_{\overrightarrow{u}}$.*

Preuve.

1. Supposons que 1 soit une valeur propre de $\overrightarrow{f}$. Puisque le déterminant de $\overrightarrow{f}$ est 1, 1 est en fait valeur propre double. En suivant la remarque 2.1.8, on voit que la multiplicité géométrique de celle-ci ne peut être que 2. Donc $\overrightarrow{f}$ est l'identité et donc f une translation.

   Supposons maintenant que 1 ne soit pas valeur propre. Le seul vecteur invariant de $\overrightarrow{f}$ est donc $\overrightarrow{0}$. On sait alors que l'on a un unique point fixe pour f que l'on note O. $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle de déterminant 1 donc une rotation. Il suit que f est une rotation affine de centre O.
2. Supposons que le déterminant de $\overrightarrow{f}$ vale -1. Le polynôme caractéristique de $\overrightarrow{f}$ est de la forme
$$X^2 + cX - 1$$
   et on a donc deux valeurs propres rélles. Comme $\overrightarrow{f}$ est une isométrie, ces valeurs propres sont 1 et -1 (car si $\overrightarrow{v}$ est un vecteur propre on a $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{v}$ et donc $\|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})\| = |\lambda|\|\overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{v}\|$.)

   On a $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$ où $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - 1_{\overrightarrow{E}})$ et où g est une isométrie admettant un point fixe O. Puisque $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{f}$, la droite Δ passant par O et de direction $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - 1_{\overrightarrow{E}})$ est fixe pour g. Comme $\overrightarrow{g}$ est une symétrie vectorielle (car $\overrightarrow{g}^2 = \mathrm{Id}$, le polynôme caractéristique - donc annulateur - étant $X^2 - 1$) , g est une symétrie orthogonale.

□

On passe maintenant aux transformations affines de l'espace. Avant ceci, nous devons étudier les rotations dans un espace affine E de dimension 3. Soit $\mathcal{D}$ une droite de E auquel on donne une orientation (c'est à dire auquel on associe un vecteur directeur déclaré d'orientation positive). On appelle rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle α (l'angle étant orienté) l'isométrie affine de point fixe D et de partie linéaire la rotation d'axe $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ et d'angle α. Dans une base orthonormale

(e_1, e_2, e_3) d'orientation positive tel que e_1 est le vecteur directeur de $\mathcal{D}$, la matrice de la rotation vectorielle est donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Théorème 2.2.3 *Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 et f une isométrie de E alors :* {class1}

1. *si f est positive, f est soit une translation, soit une rotation d'axe Δ soit un vissage, c'est à dire la composée d'une rotation avec une translation.*
2. *si f est négative, f est soit une symétrie orthogonale par rapport à un plan P, soit une symétrie-translation c'est à dire la composée d'une symétrie orthogonale avec une translation soit une antirotation c'est à dire la composé d'une symétrie orthogonal à un plan P avec une rotation d'axe Δ, orthogonale à P.*

Preuve. On considère le sous-espace $\overrightarrow{F} = \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$. Le but va être d'´tudier la dimension de ce sous-espace ce qui va nous renseigner sur les points fixes de f. On pourra ensuite s'orienter dans un des cas du théorème en se servant parfois de la classification en dimension 2.

1. si $\overrightarrow{F}$ est de dimension 3 alors $\overrightarrow{f} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$ et f est une translation.
2. supposons $\dim(\overrightarrow{F}) = 2$. On sait, d'après le théorème 2.1.9, que l'on a $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$ où g est une isométrie ayant un point fixe O et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$. Le plan P passant par O et de direction $\overrightarrow{F}$ est un plan de point fixe pour g. On a $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{f}$. Comme $\dim(\overrightarrow{F}) = 2$, ces applications linéaires admettent comme valeurs propres 1 de multiplicité géométrique 2.

   D'autre part, on sait que

   $$\overrightarrow{E} = \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}) \oplus \mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$$

   Comme $\mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$ est de dimension 1, c'est un sous-espace propre (voir la remarque 2.1.8). On a donc une troisième valeur propre qui est nécéssairement réelle égale à -1 car f est une isométrie. Notons que l'on a $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} + \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}) = \mathrm{Im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$ et que ce sous-espace est orthogonal à $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$.

   Pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$ orthogonal à $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{P}$, on a donc $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$ et donc g est la symétrie orthogonal à P. Donc si $\overrightarrow{u} \neq 0$, f est une symétrie-translation.
3. supposons $\dim(\overrightarrow{F}) = 1$. On sait toujours que $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$ où g est une isométrie admettant un point fixe O et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$. Soit Δ la droite passant par O et de direction $\overrightarrow{F}$. C'est une droite de points fixes pour g. Soit P le plan orthogonal à Δ passant par O. Puisque g conserve l'orthogonalité et $g(O) = O$, le plan est globalement invariant pour g, on a $g(P) \subset P$. Notons de plus que O est le seul point fixe de g sinon on aurait une droite de points fixes $\mathcal{D}$ pour g. Alors $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ serait fixe pour $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{F}$ de dimension 2.

La restriction de g à P est donc une rotation d'après le théorème 2.2.3 puisque cette restriction est une isométrie admettant un unique point fixe. Donc g est une rotation d'axe Δ. Donc si $\overrightarrow{u} \neq 0$, f est un vissage d'axe Δ et de vecteur $\overrightarrow{u}$.

4. Supposons que $\dim(\overrightarrow{F}) = 0$. Alors 1 n'est pas valeur propre donc on dispose d'un unique point fixe. -1 est nécessairement valeur propre puisque l'on a au moins une valeur propre réelle. Le sous espace propre associé à -1 ne peut être de dimension 2 sinon son orthogonal serait de dimension 1. Or, l'orthogonal de cet espace est $\overrightarrow{f}$-stable donc cet espace serait alors un sous-espace propre, nécessairement associé à la valeur propre 1 (le déterminant valant ± 1).
   - soit ce sous-espace propre est de dimension 3, mais alors $\overrightarrow{f} = -\mathrm{Id}$ et f est la symétrie centrale par rapport à O, ie l'antirotation de plan P passant par O et de rotation celle d'axe Δ orthogonal à P passant par O et d'angle π.
   - soit il est de dimension 1 alors la droite $\mathcal{D}$ passant par O et de direction ce sous-espace propre $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ est globalement invariante par f. Soit P le plan perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par O et soit s la symétrie par rapport à P.
     Or, $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ est contenu dans le sous espace propre de $\overrightarrow{s \circ f}$ associé à la valeur propre 1. Mieux : supposons $\overrightarrow{u}$ fixe pour $\overrightarrow{s \circ f}$. Soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$ avec $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}$ et $\overrightarrow{y} \in \mathcal{P}$. On a $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{x} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{y})$ avec $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{y}) \in \overrightarrow{P}$ par conservation de l'othogonalité. Il suit : $\overrightarrow{s \circ f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{y})$ et donc $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{y}$. Donc $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$ car 0 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$. Bref, $\overrightarrow{s \circ f}$ a comme sous-espace propre associé à la valeur propre 1 l'espace $\overrightarrow{D}$ de dimension 1. De plus, O est fixe pour $s \circ f$, on se ramène dans le cas précédent pour conclure que $s \circ f$ est une rotation d'axe D. On a donc $f = s \circ r$.

$\square$

Chapitre 3

Similitudes

3.1 Généralités

Les similitudes peuvent se voir comme des généralisations des isométries. Voici la définition :

Définition 3.1.1 Soit E un espace affine euclidien de dimension finie. Soit $f : E \to E$ une application et k un réel strictement positif. On dit que f est une similitude de rapport k si pour tout $(M, N) \in E^2$, on a :

$$\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = k\|\overrightarrow{MN}\|$$

Les isométries sont donc des similitudes de rapport 1. Un autre exemple de similitude est donné par la classe des homothéties :

Proposition 3.1.2 *Soit E un espace affine euclidien de dimension finie et soit h l'homothétie de centre $O \in E$ et de rapport $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Alors h est une similitude de rapport $|\alpha|$.*

Preuve. Pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, on a $\overrightarrow{h}(\overrightarrow{u}) = \alpha\overrightarrow{u}$ donc pour tout $(M, N) \in E^2$, on a $\overrightarrow{h}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{h(M)h(N)} = \alpha\overrightarrow{MN}$ et donc :

$$\|\overrightarrow{h(M)h(N)}\| = |\alpha|\|\overrightarrow{MN}\|$$

d'où le résultat.

□

{compos}

Proposition 3.1.3 *Soient f et g deux similitudes de rapport respectifs k et l. Alors $g \circ f$ est une similitude de rapport kl.*

Preuve. Soient M et N deux points de E alors on a

$$\|\overrightarrow{(f \circ g)(M)(f \circ g)(N)}\| = k\|\overrightarrow{g(M)g(N)}\| = k.l\|\overrightarrow{MN}\|$$

d'où le résultat.

□

Théorème 3.1.4 *Soit E un espace affine euclidien de dimension finie et soit f une similitude de rapport k de E.*

1. *Il existe une isométrie g et il existe une homothétie h tel que $f = h \circ g$.*
2. *f est une bijection affine*
3. *Si $k \neq 1$, f admet un point fixe et un seul appelé le centre de la similitude f.*

Preuve. Soit h une homothétie de rapport k. Posons $g = h^{-1} \circ f$. Comme h^{-1} est une homothétie de rapport $1/k$, alors d'après la proposition 3.1.3, g est une similitude de rapport 1. C'est donc une isométrie et on a $f = h \circ g$. f est donc une bijection affine comme composée de bijections affines. On a déjà vu dans le lemme 2.2.1 que si f est affine et si 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$ alors f admet un unique point fixe. Si $k \neq 1$ alors $\overrightarrow{f}$ n'a pas pour valeur propre 1. En effet, sinon il existerait $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$ tel que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$.

□

Définition 3.1.5 Soit f une similitude de E. On dit que f est directe si le déterminant de $\overrightarrow{f}$ est strictement positif (notons que ce déterminant est non nul car f est une bijection) et indirecte si celui-ci est négatif.

On tire les propriétés suivantes :

1. f conserve les écartes angulaires. En effet, le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$ est égal à $(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC})/(\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|$ donc le cosinus de $f(B)\widehat{f(A)}f(C)$ est égal à la même valeur par définition de la similitude.
2. Si f est directe alors f conserve les angles orientés de vecteurs et les angles orientés de droites. En effet, si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont dans $\overrightarrow{E}$ et si $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \geq 0$ alors on a $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \widehat{BAC}$. Ainsi, $(\widehat{\overrightarrow{f}(AB), \overrightarrow{f}}(AC) = \pm\widehat{BAC}$ (car f conserve les écarts angulaires) et comme $\overrightarrow{f}$ est de déterminant positif, $(\widehat{\overrightarrow{f}(AB), \overrightarrow{f}}(AC) = \widehat{BAC}$ (même démonstration si $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \leq 0$
3. En raisonnant de manière identique, on conclut que si f est indirecte alors f transforme tout angle orientés en son opposé.
4. f conserve l'othogonalité

Proposition 3.1.6 *Soit f une similitude de rapport $k \neq 1$. Soit O son centre et soit h une homothétie de centre O et de rapport α. On a alors $h \circ f = f \circ h$.*

Preuve. $h \circ f$ et $f \circ h$ coincident déjà en O, il suffit donc de vérifier que les applications linéaires associés coincident. Soit $M \in E$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{h \circ f}(\overrightarrow{OM}) &= \overrightarrow{h \circ f(O) h \circ f(M)} \\
&= \overrightarrow{h} \circ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) \\
&= \alpha \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) \\
&= \overrightarrow{f}(\alpha \overrightarrow{OM}) \\
&= \overrightarrow{f}(\overrightarrow{h}(\overrightarrow{OM})) \\
&= \overrightarrow{f \circ h}(\overrightarrow{OM})
\end{aligned}$$

□

3.2 Groupe de similitudes

Soit E un espace affine euclidien. On note $\mathrm{Sim}(E)$ l'ensemble des similitudes de E

Théorème 3.2.1 $\mathrm{Sim}(E)$ *est un groupe pour la composition d'applications et*

Preuve. On sait déjà que la loi de composition est interne pour $\mathrm{Sim}(E)$, l'identité est dans cet ensemble et si f est une similitude de rapport k alors f^{-1} est une similitude de rapport $1/k$. Donc $\mathrm{Sim}(E)$ est bien un groupe.

$\square$

Théorème 3.2.2 *Soit E un plan affine euclidien et f une similitude de E de rapport $k \neq 1$.*

1. *Si f est directe, f est la composée d'une rotation avec une homothétie de rapport k et de même centre.*
2. *Si f est indirecte, f est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ avec une homothétie de rapport k dont le centre est sur Δ.*

Preuve. Puisque $k \neq 1$, f admet un point fixe $O \in E$. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k. Alors $h^{-1} \circ f$ est une isométrie admettant un point fixe O. D'après le théorème 2.2.2 :

- Si f est directe, alors $h^{-1} \circ f$ est positive et donc $h^{-1} \circ f =: r$ est une rotation de centre O. Donc on a $f = h \circ r$.
- Si f est indirecte, alors $h^{-1} \circ f$ est négative et donc $h^{-1} \circ f =: s$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite contenant O. On a alors $f = h \circ s$.

$\square$

Théorème 3.2.3 *Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 et f une similitude de E de rapport $k \neq 1$.*

1. *Si f est directe, f est la composée d'une rotation d'axe Δ avec une homothétie de rapport k dont le centre est sur Δ*
2. *Si f est indirecte, f est la composée d'une homothétie de centre O et de rapport k avec soit une symétrie orthogonale par rapport à un plan P contenant O , soit avec une antirotation de centre O.*

Preuve. En reprenant la démonstration du théorème 2.2.3, $h^{-1} \circ f$ est une isométrie admettant un point fixe O.

- Si f est directe, alors $h^{-1} \circ f$ est positive et donc $h^{-1} \circ f =: r$ est une rotation d'axe Δ contenant O. Donc on a $f = h \circ r$.
- Si f est indirecte, alors $h^{-1} \circ f$ est négative et donc $h^{-1} \circ f = s$ est soit une symétrie orthogonale par rapport à un plan contenantt O, soit une antirotation.

$\square$

3.3 Propriétés des similitudes dans le plan euclidien

Dans toute cette partie, on se place dans le plan affine euclidien.

Théorème 3.3.1 *Soit f une bijection affine alors les conditionns suivantes sont équivalentes :*

1. *f est une similitude*
2. *Pour tout triplet de points distincts A, B et C, on a*

$$\widehat{ABC} = f(A)\widehat{f(B)}f(C)$$

3. *Pour tout quadrulet de points distincts A, B, C et D, si les droites (AB) et (CD) sont orthogonales alors les droites $(f(A)f(B))$ et $(f(C)f(D))$ le sont aussi.*

Preuve. On a déjà vu que les similitudes conservent les écarts angulaires. Donc que 1 implique 2. Supposons 2 et montrons 3 : soit $F = ((CD) \cap (AB))$. Puisque $\widehat{AFC} = \pi/2$ on a aussi $f(A)\widehat{f(F)}f(C) = \pi/2$. Comme $f(F)$ est sur les droites $(f(C)f(D))$ et $f(A)f(B)$, on peut conclure. Supposons 3 et montrons 1. On choisit deux points A et B distincts et on pose

$$k = \frac{\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

qui est strictement positif. Soient M et N deux points distincts quelconques. On pose $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$ et $\overrightarrow{v} = \dfrac{\overrightarrow{MN}}{\|\overrightarrow{MN}\|}$. On a alors

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} | \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 = 0$$

donc les vecteurs $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ sont orthogonaux. Par hypothèse il suit que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$ sont orthogonaux. Or, on a :

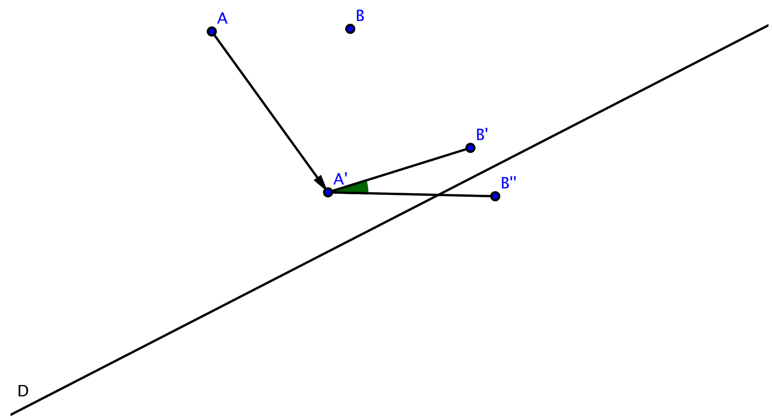
$$(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) | \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})) = \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\|^2 - \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})\|^2$$

on a donc $\|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\|^2 = \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})\|^2$ et ainsi $\dfrac{\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \dfrac{\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\|}{\|\overrightarrow{MN}\|}$ ce qui implique que f est une similitude de rapport $k = \dfrac{\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$.

□

Proposition 3.3.2 *Soient (A, B) et (A', B') deux couples de points distincts tels que $AB = A'B'$. Alors il existe une isométrie poistive f et une isométrie négative g uniques telles que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $g(A) = A'$ et $g(B) = B'$.*

Preuve. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$. On note $B'' = t(B)$. Soit r la rotation de centre A' et d'angle $(\widehat{\overrightarrow{A'B''}, \overrightarrow{A'B'}})$. L'application affine $f = r \circ t$ est une isométrie positive telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$. Considérons la droite $\mathcal{D}$ égale à la médiatrice de B' et B'' si $B' \neq B''$ et à $A'B'$ si $B' = B''$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$. Alors $g = s \circ t$ est une isométrie négative telle que $g(A) = A'$ et $g(B) = B'$.



Soient f et f' deux isométries positives telles que $f(A) = A'$, $f'(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f'(B) = B'$. Alors $f' \circ f^{-1}$ est une isométrie positive admettant deux points invariants distincts, c'est donc l'identité et $f = f'$, même chose pour g.

□

Corollaire 3.3.3 *Soient (A, B) et (A', B') deux couples de points distincts. Alors il existe une similitude directe f et une g une similitude indirecte, tout deux uniques, telles que*

$$f(A) = A',\ f(B) = B',\ g(A) = A',\ g(B) = B'$$

Preuve. Démontrons tout d'abord l'existence. Posons $k = \dfrac{A'B'}{AB}$. Soit h une homothétie de rapport k. On pose $A_1 = h(A)$ et $B_1 = h(B)$. On a alors $A_1B_1 = A'B'$. D'après le théorème précédent, il existe une isométrie positive f' et une isométrie négative g' telles que

$$f'(A_1) = A',\ f'(B_1) = B',\ g'(A_1) = A',\ g'(B_1) = B'$$

On pose alors $f = f' \circ h$ et $g = g' \circ h$ qui conviennent.

Passons à l'unicité. Soient f et f' deux similitudes directes telles que

$$f(A) = A',\ f(B) = B',\ f'(A) = A',\ f'(B) = B'$$

Alors $f \circ f^{-1}$ est une similitude directe admettant deux points fixes A' et B'. En calculant le rapport, on voit que c'est en fait une isométrie positive. Puisqu'elle a deux points fixes, c'est l'identité d'où le résultat avec démonstration analogue pour les similitudes indirectes.

□